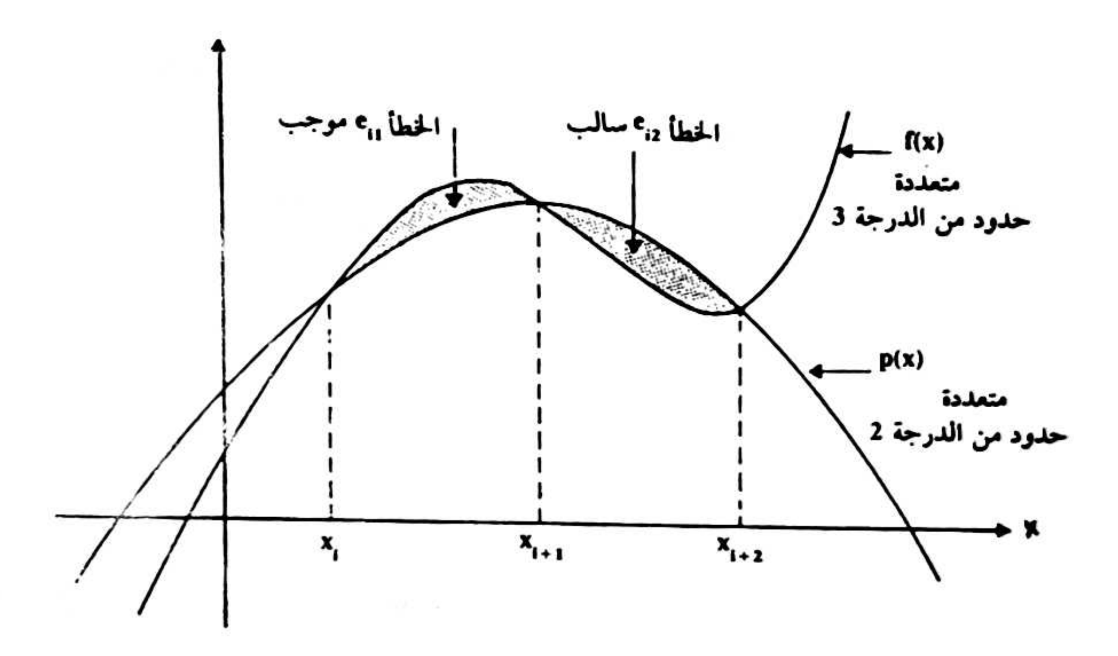
الطرق العددية باستخدام
فورتران FORTRAN



الدكتور عمر زرتي



منشورات ELGA

شركة ELGA
هاتف: 493635 (356+)
فاكس: 493180 (356+)
E-mail: elgapub@vol.net.mt
ص.ب 536
فاليتا - مالطا

المحتويات

الجزء الأول

الفصل الأول
(حل المعادلات غير الخطية)

الفصل الثاني
(حل معادلات ذات أكثر من مجهول)

الفصل الثالث
(حل المعادلات الخطية بالطرق المباشرة)

الفصل الرابع
(الاستكمال)

الفصل الخامس
(التكامل العددي)

الفصل السادس
(التفاضل العددي)

الجزء الثاني

الفصل السابع
(الحل العددي للمعادلات التفاضلية)

الفصل الثامن
(مسائل القيم الحدية)

الفصل التاسع
(مسائل القيم الذاتية)

الفصل العاشر
(طريقة المربعات الصغرى)

الفصل الحادي عشر
(حل المعادلات التفاضلية – الجزئية)

ملحق
(حلول الاختبارات)

مقدمة

يعتبر موضوع الطرق العدديَّة من أهم المواضيع في الرياضيات التطبيقية، وذلك لكونها وسيلة فعالة في حل المسائل الرياضية التي تواجه المهندس والباحث العلمي.

وقد أضفى اختراع الحاسوب صبغة خاصة لهذا الفرع من فروع الرياضيات، وذلك لقيام هذه الآلة بالدور الحسابي الروتيني ـ الذي هو عادة جزء مهم في كل الطرق العددية ـ بسرعة هائلة ودقة فائقة، حتى أصبح اللجوء إلى استعمال الطرق العددية في حل المسائل التي يصعب حلها بالطرق الرياضية المعروفة أمراً عادياً في البحوث العلمية المتقدّمة.

ونظراً لحداثة هذا الموضوع، وتطوره السريع المصاحب لتطور الآلات الحاسبة، فإن توفر المراجع العربية في مجال التحليل العددي يكاد يكون معدوماً، مما دفعني إلى تأليف هذا الكتاب على أمل أن يغطي جزءاً من هذا النقص.

هذا الكتاب هو خلاصة المادة التي قمت بتدريسها في مقررين بقسم الحاسب الآلي بكلية العلوم الأساسية (طرابلس) لسنوات عديدة. وبالتالي فإنه يشتمل على محتويات تكفي لتدريس موضوع (التحليل العددي) على فصلين دراسيين (أي سنة كاملة). وبالتحديد فإن الجزء الأول من الكتاب (أي الفصول من 1

إلى 6) هو مادة الفصل الأول لطلبة السنة الثالثة من مختلف التخصصات، والجزء الثاني يعطى في الفصل الثاني.

لاستيعاب المنهج المتبع في هذا الكتاب، يجب أن يكون الطالب قد درس مسبقاً المواضيع التالية: بالنسبة للجزء الأول (1) البرمجة بلغة فورتران، (2) الجبر الخطي، (3) التفاضل والتكامل. أما بالنسبة للجزء الثاني فيضاف إلى ذلك مادة المعادلات التفاضلية.

لقد راعيت في الكتابة أن يكون الأسلوب سهلاً ومباشراً مع محاولة تقريب مفاهيم متقدمة (مثل موضوع الاستقرار والتقارب) بطريقة قد تختلف عن الطرق المتبعة في العادة وذلك لغرض التبسيط.

وقد تعمّدت التركيز على برمجة أغلب الطرق العددية التي تتم مناقشتها، واللغة المستعملة لذلك هي فورتران. والذي دفعني إلى هذا التركيز سببان: الأول، توضيح الطريقة العددية بأسلوب محدد وهو لغة البرمجة؛ والثاني، تقوية الطالب وتدريبه أكثر في مجال البرمجة بدراسته لبرامج مختلفة ومتعددة. ولا شك في أن تعلم الطرق العددية دون إلمام بلغة من لغات البرمجة يعتبر غير ذي جدوى. أما اختيار لغة فورتران دون غيرها فذلك لأنها هي الأنسب في هذا المجال والأكثر استخداماً.

وأخيراً لا يفوتني أن أشكر كل من ساهم في هذا الكتاب سواء بالمراجعة، أو إبداء الملاحظات، أو بأي صورة أخرى... وأخص بالشكر كلاً من الدكتور علي بن الأشهر من قسم الرياضيات بكلية العلوم والدكتور مصطفى عبد العال من قسم الحاسب الآلي بنفس الكلية على ملاحظاتهما القيّمة حول الكتاب.

الجزء الأول

الفصل الأول

حل المعادلات
Solution of Equations

1.1 مقدمة

يستعمل اصطلاح «حل المعادلة» للتعبير عن عملية إيجاد قيمة المجهول x التي تحقق المعادلة. فمثلاً المعادلة:

$$2x + 3 = 0 \qquad (1.1)$$

يمكن حلها بإضافة 3− للطرفين الأيمن والأيسر، ثم القسمة على 2 لنحصل على:

$$x = -3/2 \qquad (1.2)$$

وإذا عرفنا الدالة:

$$f(x) = 2x + 3$$

فإن $x = -3/2$ تعتبر جذراً للدالة f(x). وأحياناً يستعمل اصطلاح «إيجاد جذور المعادلة» للدلالة على حل المعادلة. لاحظ أن المعادلة (1.1) هي معادلة خطية، أي أن المجهول x يظهر في المعادلة بأسّ يساوي الواحد؛ فمثلاً المعادلة:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad (1.3)$$

ليست معادلة خطية حيث إن أكبر أس للمتغيّر x هـو 2، أي أنها معادلـة من الدرجة الثانية. ويمكن حل هذه المعادلة باستعمال القانون المعروف:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

وبالتالي فإن لهذه المعادلة حلّين، هما:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2$$

والسؤال الآن هو ما إذا كان بالإمكان حل معـادلات من الدرجـة الثالثـة فما فوق؟ والجواب هو أن ذلك ممكن في حالة الدرجة الثالثة والرابعة وإن كان الحل ليس سهلاً على الاطلاق. أما عدا ذلك فإن اللجوء إلى الحلول التقريبية أمـر لا مفر منه.

أما المعادلات التي تحتوي على الدوال المثلثية والدوال الأسية، فإن حلها عادة ما يكون غير ممكن إلّا بالطرق التقريبية. والأمثلة على ذلك المعادلات التالية:

$$x - \cos x = 0 \qquad (1.4)$$

$$e^x - x - 2 = 0 \qquad (1.5)$$

$$\ell og\, x + x - 10 = 0 \qquad (1.6)$$

ولهـذا فإن دراسـة الطرق العـددية لإيجـاد الحلول التقريبيـة لهـذه المعـادلات وغيرها تعتبر من المواضيع الهامة جداً.

1.2 طريقة الرسم Graphic Method

لإيجـاد حل تقـريبي للمعادلـة $f(x) = 0$، نستعمل طـريقة الـرسم البيـاني، وذلك برسم المنحنى $f(x)$ وإيجاد نقطة تقاطع هذا المنحنى مع محور السينات.

مثال (2.1): أوجد حلاً تقريبياً للمعادلة:

$$f(x) = e^x - x - 2 = 0$$

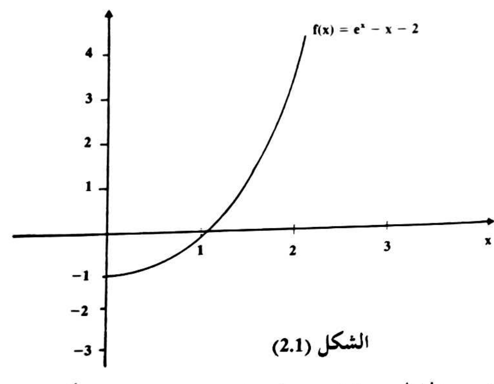
في الفترة [0, 4].

أولاً نـوجد قيم $f(x)$ لبعض قيم x حتى نتمكن من رسم هـذه الدالـة، على النحو التالي:

x	0	1	2	3	4
f(x)	−1	−.28	3.4	15	49

لاحظ أن قيم $f(x)$ قـد تم حسابهـا في هذا الجـدول مقربـة لأقرب رقمـين، حيث إن الرسم لا يحتاج لدقة أكثر من ذلك.

والآن نوصل منحنى بين النقاط المبينة على النحو التالي (شكل 2.1):



الشكل (2.1)

يتبين من هذا الرسم التقريبي أن الجذر هو $x = 1.1$ تقريباً.

ملاحظة:

بالإمكان كتابة المعادلة:

$$e^x - x - 2 = 0$$

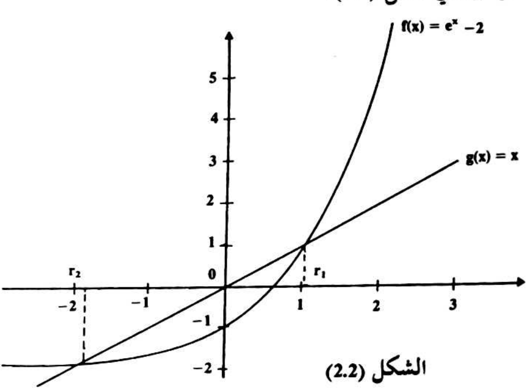
على النحو:

$$e^x - 2 = x$$

وبالتالي فإن الجذور تقع عند نقط تقاطع الدالتين (المنحنيين):

$$g(x) = x \quad , \quad f(x) = e^{x} - 2$$

وكما هو مبين في شكل (2.2).



الشكل (2.2)

من الرسم في الفترة [2 ,2−] يتضح أن للمعادلة (1.5) حلّين في هذه الفترة هما 1.1 و1.8− تقريباً. للتحقق من ذلك، نلاحظ أن:

$$e^{1.1} - 1.1 - 2 \simeq -.096$$

و:

$$e^{-1.8} - (-1.8) - 2 \simeq -.035$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن لا يساوي صفراً كما يجب في حالة الحل الصحيح، ولكن القيم المتحصل عليها تعتبر قريبة من الصفر نسبياً، ويمكن الاستفادة من الجذور التقريبية كبداية في عملية تكرارية للحصول على جذور أصح. من هذه الطرق طريقة التنصيف.

1.3 طريقة التنصيف Bisection Method

بالإمكان توضيح هذه الطريقة التي تعتمد على محاصرة الجذر في فترة تصغر في كل مرة بمقدار النصف بالمثال التالي:

مثال (3.1):

أوجد حل المعادلة:

$$f(x) = \cos x - x = 0$$

في الفترة [0.5, 1.5] بطريقة التنصيف.

أولاً يجب أن نتأكد أن f(.5) و f(1.5) مختلفتان في الإشارة، وهذا صحيح حيث إن:

$$f(.5) = 0.38, \; f(1.5) \simeq -1.43$$

إذن فهناك جذر للدالة f(x) في الفترة [.5, 1.5] حيث إن هذه الدالة مستمرة continuous ولكي تتغير قيمتها من السالب إلى الموجب لا بد أن تمرّ بمحور السينات.

أول قيمة تقريبية للجذر نتحصل عليها بأخذ نقطة المنتصف للفترة [.5, 1.5] وهي:

$$c_1 = \frac{.5 + 1.5}{2} = 1$$

والآن نحتاج لمعرفة إشارة $f(c_1)$ ولذلك نقوم بحساب قيمتها وهي:

$$f(c_1) = f(1) = -0.46$$

أي أنها سالبة، وهذا يعني أن الجذر المطلوب يقع في الفترة [0.5,1] حيث إن f(x) تتغير إشارتها من الموجب عند 0.5 إلى السالب عند 1. إذن تكون القيمة التقريبية الثانية للجذر عند نقطة المنتصف للفترة [0.5,1] وهي:

$$c_2 = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75$$

وحيث إن:

$$f(c_2) = f(0.75) \simeq -.018$$

وهي سالبة، فإن الجذر يقع في الفترة [0.5, 0.75]، وبالتالي فإن القيمة **التقريبية الثالثة هي:**

$$c_3 = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

وحيث إن:

$$f(c_3) \simeq 0.186$$

وهي قيمة موجبة، فإن الجذر يقع في الفترة [0.625, 0.75] وبالتالي:

$$c_4 = \frac{0.625 + 0.75}{2} = 0.6875$$

$$f(c_4) = 0.085$$

أي أن الجذر يقع في الفترة [0.6875, 0.75]، وبالتالي فإن:

$$c_5 = (0.6875 + 0.75)/2 = 0.71875$$

ونجد أن:

$$f(c_5) \simeq 0.034$$

وكما هو واضح فإن هذه الطريقة تتطلب عدداً كبيراً من العمليات المتكررة «iterations»، ولكن استعمال الحاسوب في الحسابات يجعل ذلك مقبولاً، ويسهل هذه الصعوبة.

والسؤال الذي يطرح الآن: متى نتوقف؟ أي كم عملية تكرارية نحتاج لها للحصول على الحل المطلوب؟

والجواب هو أن عدد العمليات (أو الدورات) يزداد بازدياد الدقة المطلوبة [والمقصود بكلمة الدقة هو عدد الخانات الصحيحة في الجذر التقريبي ابتداءً من اليسار، فإذا كان الجذر الصحيح مثلاً هو 0.1234 والجذر التقريبي هو 0.12 فإن هذا التقريب دقيق لخانتين صحيحتين هما 12].

فإذا كان المطلوب أن يكون الجذر التقريبي مطابقاً تماماً للجذر الصحيح فإن

ذلك قد يتطلب عدداً لا نهائياً من الدورات، وبالتالي فإننا عادة ما نكتفي بالشرط:

$$|f(c_n)| < \varepsilon \qquad (3.1)$$

بدلاً من $f(c_n) = 0$، حيث ε رقم صغير، كلما صغر زادت دقة c_n وزاد عدد الدورات n. وحيث إن هذا الاستبدال يعتبر **تنازلاً وتسامحاً**، فإن المتباينة (3.1) تسمى **حالة التسامح Tolerance condition** ويسمى الرقم ε برقم التسامح.

والآن بالإمكان تلخيص طريقة التنصيف (أو بتعبير آخر خوارزمية التنصيف) في الخطوات التالية:

1 - المعطيات هي: الفترة $[a_1, b_1]$ التي يقع داخلها الجذر بحيث:

$$f(a_1)\, f(b_1) < 0$$

رقم التسامح ε (وهو رقم صغير مثل 10^{-6})

2 - إبدأ بقيمة $i = 1$.

3 - أحسب نقطة المتنصف:

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

4 - إذا كان

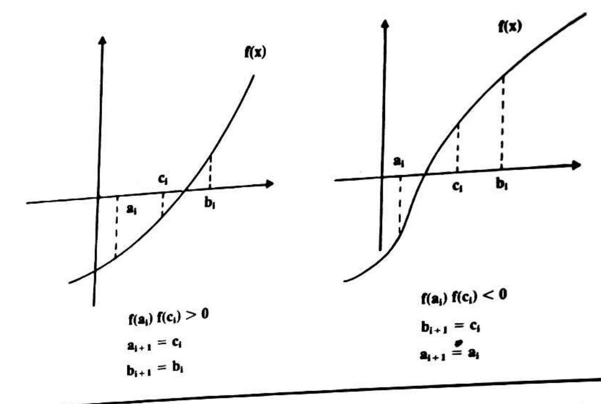
$$|f(c_i)| < \varepsilon$$

فاطبع قيمة c_i وتوقف.

5 - إذا كان $f(a_i)\, f(c_i) < 0$ فاجعل $b_{i+1} = c_i$ (أي أن b_{i+1} تأخذ قيمة c_i) وإلا فاجعل $a_{i+1} = c_i$. في الحالة الأولى $a_{i+1} = a_i$ وفي الحالة الثانية $b_{i+1} = b_i$.

6 - ارجع إلى الخطوة (3) مع إضافة 1 إلى i.

ولتوضيح الخطوة (5)، نقوم برسم الحالتين في هذه الخطوة في شكل (3.2).



مثال (3.2) :

برنامج بلغة فورتران لطريقة التنصيف

اكتب برنامجاً بلغة فورتران مستعملا طريقة التنصيف لحل المعادلة:

$$e^{-x} = x$$

نلاحظ أن الدالة :

$$f(x) = e^{-x} - x$$

تتغير إشارتها بحيث:

$$f(0) > 0,\ f(1) < 0$$

أي أن :

$$f(0)\,f(1) < 0$$

وبالتالي يمكن اعتبار أن الجذر يقع في الفترة (1 ,0) وأخذ هذه الفترة كفترة ابتدائية :


```
c     .... BISECTION METHOD........
           F(X) = EXP(-X)-X
           EPS = 0.00001
           A = 0
           B = 1
           FA = F(A)
5          C = (A+B)/2
           FC = F(C)
           IF (ABS(FC) - EPS) 20,10,10
10         TEST = FA * FC
           IF (TEST.GT.0) THEN
                  A = C
                  FA = FC
           ELSE
                  B = C
           ENDIF
           GOTO 5
20         WRITE (*,30) C,FC
30         FORMAT ( 'APPROXIMATE ROOT = ' ,E12.5, 10X,
          *' F (ROOT) = ', E12.5)
           STOP
           END
```

ملاحظة :

لاحظ أن الدالة F(x) يتم استدعاؤها وإيجاد قيمتها مرة واحدة في كل دورة في البرنامج المذكور وذلك توفيراً لوقت الحاسب خاصة في حالة وجود دالة يتطلب حسابها وقتاً طويلاً.

تقدير الخطأ في طريقة التنصيف :

إذا كانت c هي القيمة التقريبية للقيمة الصحيحة t فإن **الخطأ المطلق يعرف** كالآتي:

$$e_a = t - c \qquad (3.2)$$

أما الخطأ النسبي فهو:

$$e_r = \frac{t - c}{t}\ ,\ t \neq 0 \qquad (3.3)$$

لتقدير الخطأ في القيمة التقريبية للجذر نلاحظ أن الفترة التي تحتوي على الجذر (a_n, b_n) في الدورة n يكون طولها ℓ_n نصف طول الفترة في الدورة

السابقة. أي أن طول الفترة ينقص بمقدار النصف في كل دورة بحيث:

$$\ell_n = b_n - a_n = \frac{1}{2}\,\ell_{n-1}$$

وأيضاً:

$$\ell_{n-1} = \frac{1}{2}\,\ell_{n-2}$$

إذن:

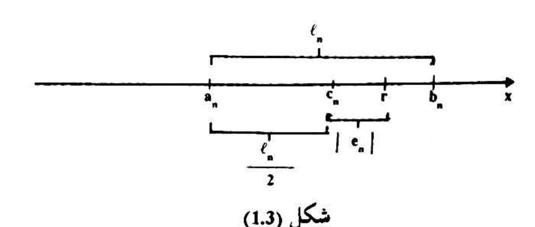
$$\ell_n = \frac{1}{2^2}\,\ell_{n-2}$$

وبصورة عامة:

$$\ell_n = \frac{1}{2^{n-1}}\,\ell_1 \qquad (3.4)$$

حيث ℓ_1 طول الفترة الابتدائية.

وكما هو واضح من الشكل (1.3):



شكل (1.3)

فإن الخطأ المطلق e_n في الدورة n من طريقة التنصيف يحقق ما يلي:

$$|e_n| < \ell_n/2 \qquad (3.5)$$

وبالتالي، من (3.4) ينتج أن:

$$|e_n| < \frac{\ell_1}{2^n} \qquad (3.6)$$

ومن ذلك نستنتج أن الخطأ المطلق في طريقة التنصيف يؤول إلى الصفر عندما يؤول عدد الدورات إلى ما لا نهاية، وبعبارة أخرى نقول إن طريقة

التنصيف لها خاصية التقارب convergence. **وهذه الخاصية مهمة جداً في** التحليل العددي ولا تتوفر في كثير من الحالات.

> **مثال (3.2):**
>
> ما عدد الدورات التي قد تلزم في طريقة التنصيف **للحصول على جذر** تقريبي C_n بحيث يكون الخطأ المطلق في C_n **لا يتجاوز 0.00001 علماً بأن** طول الفترة الابتدائية هو 1.

نفترض أن:

$$\frac{\ell_1}{2^n} \leqslant 0.00001$$

وبما أن $\ell_1 = 1$ فإن

$$2^n \geqslant 100000$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين، نحصل على:

$$n \geqslant (5/\log 2)$$
$$\geqslant 16.6$$

وبما أن n يجب أن تكون عدداً صحيحاً، فإن:

$$n = 17$$

تحقق المطلوب، أي أن 17 دورة في طريقة التنصيف تحقق **خطأً مطلقاً لا** يتجاوز 0.00001 في حالة أن طول الفترة الابتدائية هو 1.

تمارين (1)

1 - باستعمال طريقة رسم المنحنيات، أوجد فترة مناسبة تحوي كل جذر من جذور المعادلات التالية:

(a) $x^2 - x - 7 = 0$

(b) $\exp(-x) + x - 3 = 0$

(c) $\ell n(x) - x + 7 = 0$

(d) $x^3 - x - 10 = 0$

2 - أوجد الجذور التقريبية للمعادلات في تمرين (1) وذلك برسم منحني الدالتين $f(x)$ و$g(x)$ حيث $g(x) = x$ و $f(x) = g(x)$ عند كل جذر.

3 - استعمل طريقة التنصيف لإيجاد قيم تقريبية لجذور المعادلات في تمرين (1). استعمل 5 دورات فقط.

4 - إذا كان $f(a)\,f(b)$ قيمة سالبة ، فهل هذا يعني وجود جذر في الفترة $[a, b]$؟ استعمل الدالة $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ في الفترة $[0,2]$ لتحقيق إجابتك مبيناً ذلك بالرسم.

5 - أوجد القيمة التقريبية للحذر الموجب للدالة: $f(x) = x - 3\,\ell n\,(x+1)$

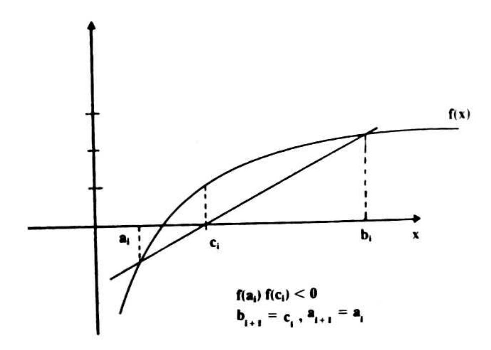
باستعمال طريقة التنصيف، أوقف الدورات عندما $|f(x)| < .01$.

6 - اكتب برنامجاً بلغة فورتران مستعملاً طريقة التنصيف لإيجاد قيمة تقريبية لجذر الدالة F(X) الواقع في الفترة [A, B] بحيث لا يتجاوز الخطأ المطلق عن 0.000001. [ملاحظة: أكتب البرنامج على صورة SUBROUTINE بحيث يتم إدخال A و B و F(x) في البرنامج الرئيسي].

7 - أوجد عدد الدورات التي قد تلزم لإيجاد قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x) = 0$ بحيث لا يتجاوز الخطأ المطلق في هذه القيمة عن 0.000001 إذا كان طول الفترة الابتدائية هو 2.

1.4 طريقة الوضع الخاطىء Method of False Position

هذه الطريقة شبيهة بطريقة التنصيف من حيث حصر الجذر بين قيمتين هما طرفا الفترة، ولكن بدل أخذ نقطة المنتصف للفترة $[a_i, b_i]$ كجذر تقريبي عند الدورة i، نوصل النقطتين $(a_i, f(a_i)), (b_i, f(b_i))$ بخط مستقيم ليتقاطع مع محور السينات في النقطة c_i كما في الرسم (شكل 4.1).



شكل (4.1)

وكما هو الحال في طريقة التنصيف، نختبر إشارة $f(a_i)\,f(c_i)$. إذا كانت سالبة (كما في شكل 4.1) فإن b_{i+1} تأخذ قيمة c_i وتبقى a_{i+1} تساوي a_i، أما إذا كانت الاشارة موجبة فإن a_{i+1} تأخذ قيمة c_i وتبقى b_{i+1} تساوي b_i.

لإيجاد قيمة c_i، نوجد معادلة الخط المستقيم، وهي:

$$\frac{y - f(a_i)}{x - a_i} = \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}$$

وبوضع $y = 0$ و $x = c_i$، نحصل على:

$$c_i = a_i - \frac{(b_i - a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}\, f(a_i) \qquad (4.1)$$

أو بصورة أخرى:

$$c_i = b_i - \frac{(b_i - a_i)\, f(b_i)}{f(b_i) - f(a_i)} \qquad (4.2)$$

والآن نلخص **طريقة الوضع الخاطئ** في الخوارزمية التالية:

1 ـ **المعطيات هي:** b_1, a_1 بحيث $f(a_1)\, f(b_1) < 0$.

ـ الدالة $f(x)$ ورقم التسامح ε.

2 ـ أبدأ بالقيمة $i = 1$.

3 ـ أحسب c_i من (4.1) أو (4.2).

4 ـ إذا كانت قيمة $|f(c_i)|$ أقل من ε، فاطبع c_i وتوقف. وإلا فاختبر إشارة $f(a_i)\, f(c_i)$ بحيث:

إذا كانت القيمة سالبة فدع $b_{i+1} = c_i$، وإذا كانت موجبة فدع $a_{i+1} = c_i$. في الحالة الأولى $a_{i+1} = a_i$ وفي الحالة الثانية $b_{i+1} = b_i$.

5 ـ أرجع إلى الخطوة (3) مع إضافة 1 إلى i.

البرنامج بلغة الفورتران لهذه الطريقة مطابق للبرنامج الذي تمت كتابته لطريقة التنصيف عدا الخطوة التي يتم فيها حساب c_i. لاحظ أنه بالإمكان كتابة البرنامج بحيث يتم حساب الدالة مرة واحدة فقط في كل دورة. ولهذا فإن (4.2) لا تكتب في البرنامج على النحو:

```
C = B − (B − A)* F(B)/ (F(B) − F(A))
```

لأن هذه الطريقة تكلف حساب الدالة 3 مرات في هذه الجملة، ولكن يجب كتابتها على النحو:

```
C = B − (B − A) * FB/ (FB − FA)
```

حيث:

```
FA = F(A), FB = F(B)
```

يتم حسابها خارج الدورة، ولكن تحسب:

```
FC = F(C)
```

داخل الدورة، والمطلوب من القارئ كتابة برنامج لهذه الطريقة. (انظر تمرينات 2).

ملاحظة:

طريقة الوضع الخاطئ تتمتع بخاصية التقارب كما هو الحال في طريقة التنصيف.

> **مثال (4.1):**
> أوجد جذراً تقريبياً للمعادلة $f(x) = x - \tan(x)$ باستعمال طريقة الوضع الخاطئ علماً بأن الجذر يقع في الفترة (4,4.5). أوقف الدورات عندما $|f(x)| < .005$.

أولاً نلاحظ أن: $f(a_1) = f(4) = 2.8421$

$f(b_1) = f(4.5) = -0.1373$

وبالتالي فإن الفترة (4,4.5) تحتوي على جذر واحد على الأقل. نحسب الآن c_1 من (4.1) بحيث:

$$c_1 = 4 - (2.8421)\frac{4.5 - 4}{-0.1373 - 2.8421} = 4.477$$

وبما أن: $f(c_1) = 0.3075$

قيمة موجبة، فإن الجذر يقع في الفترة (4.477,4.5) وبالتالي فإن:

$$c_2 = 4.477 - (0.3075)\frac{4.5 - 4.477}{-0.1373 - 0.3075} = 4.4929$$

وبما أن:

$$f(c_2) = 0.126 > 0$$

فإن الجذر يقع في الفترة (4.4929,4.5). ونستمر على هذا النحو في حساب c_5, c_4, c_3 حيث نجد أن:

$$c_3 = 4.4935$$

$$|f(c_5)| = 0.00183 < 0.005$$

وبالتالي نتوقف عن الدورات الحسابية كما هو مطلوب.

1.5 طريقة القاطع Secant Method

هذه الطريقة تتفق مع طريقة الوضع الخاطئ من حيث استعمال المعادلة (4.1) أو (4.2)، ولكن لا نشترط هنا أن تكون الفترة الابتدائية (a_1, b_1) محتوية على الجذر. ويمكن تلخيص هذه الطريقة في الخوارزمية التالية:

1 - **المعطيات: الدالة f(x)**

- **أي نقطتين b_1, a_1**
- **رقم التسامح ε**
- **الحد الأعلى لعدد الدورات m**

2 - **قم بالخطوات (3) إلى (6) بحيث لا يتجاوز عدد الدورات m (أي أن i تبدأ من 1 إلى m)**

3 - **أحسب** $c_i = a_i - f(a_i)\dfrac{(b_i - a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$

4 - **أحسب $f(c_i)$ وقارن $|f(c_i)|$ بالعدد ε. وإذا كان $|f(c_i)| < \varepsilon$ إطبع قيمة c و f(c) ثم توقف، وإلا فاستمر إلى الخطوة (5).**

5 - **دع a_{i+1} تأخذ قيمة b_i ودع b_{i+1} تأخذ قيمة c_i، أي (بالرموز) دع:**

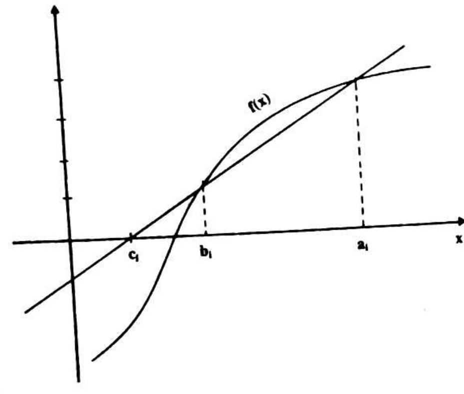
$$a_{i+1} = b_i \qquad b_{i+1} = c_i$$

6 - **ارجع إلى الخطوة (3).**

ملاحظة:

حددنا في طريقة القاطع الحد الأعلى لعدد الدورات **ولم نفعل ذلك في طريقة التنصيف وطريقة الوضع الخاطىء وذلك لسبب مهم جداً وهو أن التقارب في طريقة القاطع ليس دائماً أكيداً، وبالتالي قد يحدث أن ندخل في حلقة لا نهائية** من الدورات دون أن نتوصل إلى الحل بطريقة القاطع. وقد نتساءل إذن لماذا نستعمل هذه الطريقة أحياناً ما دام الوصول إلى الحل عن طريقها غير مضمون؟ والجواب هو أن اشتراط وقوع الجذر داخل الفترة الابتدائية واختلاف إشارة الدالة على حدي هذه الفترة قد يصعب أحياناً توفره.. ولذلك نستعمل طريقة القاطع في هذه الحالة بدل طريقة الوضع الخاطىء.

والرسم في الشكل (5.1) يوضح كيفية عمل طريقة القاطع.



شكل (5.1)

مثال (5.1):

أحسب حلاً تقريبياً للمعادلة $f(x) = e^x - 5 = 0$ باستعمال طريقة القاطع. افترض أن $a_1 = 0$ و $b_1 = 1$ واحسب ثلاث دورات فقط.

الدورة الأولى :

$$a_1 = 0, f(a_1) = -4$$

$$b_1 = 1, f(b_1) = -2.2817$$

$$c_1 = a_1 - f(a_1)\,\frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} = 2.3278$$

$$f(c_1) = 5.2554$$

الدورة الثانية :

$$a_2 = b_1 = 1, f(a_2) = f(b_1) = -2.2817$$

$$b_2 = c_1 = 2.3278, f(b_2) = f(c_1) = 5.2554$$

$$c_2 = a_2 - f(a_2)\,\frac{(b_2 - a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} = 1.4020$$

$$f(c_2) = -0.93684$$

الدورة الثالثة :

$$a_3 = b_2 = 2.3278, f(a_3) = f(b_2) = 5.2554$$

$$b_3 = c_2 = 1.4020, f(b_3) = f(c_2) = -0.93684$$

$$c_3 = a_3 - \frac{f(a_3)\,(b_3 - a_3)}{f(b_3) - f(a_3)} = 1.5421$$

$$f(c_3) = -0.32560$$

برنامج لحل المعادلة $f(x) = 0$ بطريقة القاطع

لإيجاد حل تقريبي للمعادلة $e^x - 5 = 0$ بطريقة القاطع، نكتب البرنامج التالي بلغة الفورتران.


```
C.....SECANT METHOD............
      F(X)=EXP(X)-5
      A=0
      B=1
      MAX=50
      FA=F(A)
      FB=F(B)
      EPS=0.0001
      DO 100 I=1,MAX
      C=A-FA*(B-A)/(FB-FA)
      FC=F(C)
      IF(ABS(FC).LT.EPS)GO TO 200
      A=B
      B=C
      FA=FB
      FB=FC
100   CONTINUE
200   WRITE(*,210)C,FC,I
210   FORMAT(10X,'ROOT=',E15.6,10X,'F(ROOT)
     *=',E15.6,10X,*'ITERATIONS=',I3)
      STOP
      END
```

عند إجراء هذا البرنامج، نتحصّل على الناتج الآتي:

ROOT = 0.160944E + 01 F(ROOT) = − 0.461802E − 05 I TERATIONS = 6

تمارين (2)

1 - أوجد قيماً تقريبية لجذور المعادلات في مجموعة تمارين «1» تمرين -1-، مستعملاً طريقة الوضع الخاطىء بخمس دورات.

2 - حل تمرين -5- من مجموعة تمارين «1» بطريقة الوضع الخاطىء.

3 - اكتب برنامجاً بلغة الفورتران لإيجاد قيمة تقريبية لجذر الدالة $F(x)$ الواقع في الفترة $[A, B]$ باستعمال طريقة الوضع الخاطىء مع إيقاف الدوران عندما $|F(x)| < \varepsilon$. اكتب البرنامج على صورة SUBROUTINE بحيث يتم تعريف $F(x)$, B, A في البرنامج الرئيسي.

4 - أحسب الجذر التربيعي للعدد 5 باستعمال طريقة الوضع الخاطىء بحيث يكون التقريب c محققاً $|c^2 - 5| < .01$.

5 ـ استعمل طريقة القاطع لإيجاد جذر تقريبي للمعادلة $xe^x = 2$ مستعملاً التقريبين 0.7 و 0.8 في البداية وحساب 4 دورات فقط.

6 ـ لحساب $\sqrt{5}$ بطريقة القاطع «أ» بيّن أن هذه الطريقة مكافئة للمتابعة الآتية:

$$c_i = (a_i b_i + 5)/(a_i + b_i)$$

$$a_{i+1} = b_i, \quad b_{i+1} = c_i$$

«ب» أحسب c_1، c_2، c_3، c_4 إذا كانت $b_1 = 3, a_1 = 4$.

«حـ» أكتب برنامجاً لحساب c_i من $i = 1$ إلى $i = 20$.

7 ـ أكتب برنامجاً فرعياً Subroutine لحل المعادلة $f(x) = 0$ بالطريقة التالية: اختبر إشارة $f(a_i) f(b_i)$ حيث $i = 1, 2, \ldots$ فإذا كانت موجبة استعمل طريقة القاطع، وإلّا فاستعمل طريقة الوضع الخاطىء من تلك الدورة فيما بعد. ما هي مزايا هذه الطريقة؟

8 ـ أوجد حلاً تقريبياً للمعادلة $f(x) = xe^{-x} - 1 = 0$ بطريقة القاطع مبتدئاً بالقيمتين $b_1 = 1, a_1 = 0$. احسب 3 دورات فقط. هل ستؤدي هذه الطريقة إلى الحل؟ وضّح إجابتك بالرسم.

1.6 طريقة نيوتن (Newton's Method)

نلاحظ أن طريقة القاطع تعتمد على القاعدة:

$$c_i = b_i - \frac{f(b_i)}{s_i} \qquad (6.1)$$

حيث:

$$s_i = \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}$$

هو ميل المستقيم الواصل بين النقطتين $(a_i, f(a_i))$ و $(b_i, f(b_i))$. كما نلاحظ أنه إذا كانت النقطتان قريبتين ومتلاصقتين فإن:

$$f'(b_i) \simeq s_i$$

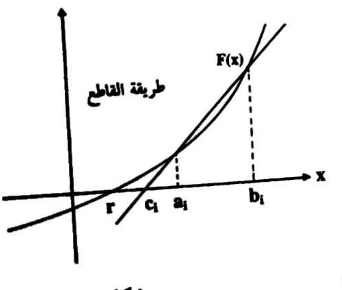
حيث $f'(b_i)$ هي قيمة المشتقة الأولى عند b_i وتمثل ميل المماس عند هذه النقطة. وإذا استعملنا:

$$x_{i+1} = c_i$$
$$x_i = a_i \simeq b_i$$

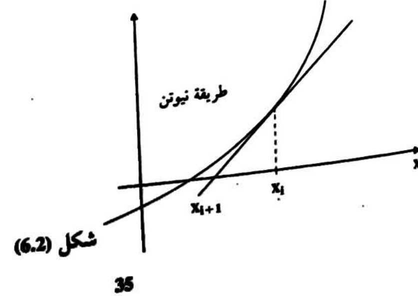
فإن (6.1) تؤول إلى:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (6.2)$$

وهي القاعدة المعروفة باسم طريقة نيوتن. ويمكن توضيح هذه الطريقة بالرسم على النحو المبين في الشكل (6.2) حيث نوجد x_{i+1} من تقاطع المماس مع محور السينات.



شكل (6.1)

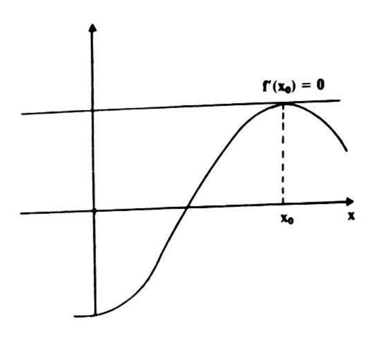


شكل (6.2)

إلّا أن هذه الطريقة قد لا تؤدي إلى الحل المطلوب، وهذا يحدث بالذات إذا كانت:

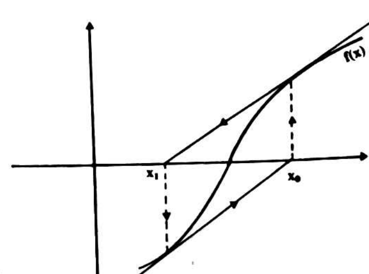
$$f'(x_0) \simeq 0$$

كما هو مبين بالرسم حيث يصبح المماس أفقياً ولا يتقاطع مع محور السينات (شكل 6.3).



شكل (6.3)

لذلك يجب أن تختبر قيمة $f'(x)$ بحيث إذا كانت قريبة من الصفر نتوقف عن الحل، كما يجب أن يوضع حد أعلى لعدد الدورات في برنامج هذه الطريقة، احتياطاً للدخول في دورات لا نهائية مثل الوضع في الشكل (6.4).



شكل (6.4)

ومن المناسب أحياناً أن نستعمل الشرط:

$$|x_{i+1} - x_i| < \delta$$

لإيقاف الدورات بدلاً من (أو مع) الشرط:

$$|f(x_i)| < \varepsilon$$

وذلك لأن: $|x_{i+1} - x_i| = \left| \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right|$

فإذا كانت x_{i+1}, x_i متقاربتين فبالضرورة أن تكون $f(x_i)$ **ذات قيمة صغيرة** إذا كانت $f'(x_i)$ غير قريبة من الصفر.

والآن يمكن أن نلخص طريقة نيوتن في الخوارزمية التالية:

1 - حدد المعطيات: $f(x)$، $f'(x)$، x_0 **(قيمة تقريبية للجذر)، ε و δ (عددان صغيران)، max (الحد الأعلى لعدد الدورات).**

2 - نفذ الخطوات (3) إلى (7) من $i = 0$ إلى $i = max$.

3 - إذا كانت $|f(x_i)| < \varepsilon$ فاطبع $f(x_0), i, x_i$ **وتوقف.**

4 - إذا كانت $|f'(x_0)| < \varepsilon$ **فاطبع ما يفيد ذلك وتوقف.**

5 - أحسب $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

6 - إذا كانت: $|x_{i+1} - x_i| < \delta$ **إطبع** $f(x_i), i, x_i$ **وتوقف.**

7 - ارجع إلى الخطوة (3).

> **مثال (6.1):**
>
> حل المعادلة $x^3 + 2e^x = 120$
>
> **بطريقة نيوتن. أوقف الدورات عندما** $|f(x_i)| < 10^{-4}$
>
> **استعمل القيمة الابتدائية** $x_0 = 3.5$

دع : $f(x) = x^3 + 2e^x - 120$

إذن : $f'(x) = 3x^2 + 2e^x$

إذن :

$$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$$
$$= 3.5 - (-10.89) / 102.98$$
$$= 3.605749$$
$$f(x_1) = 0.492847$$
$$x_2 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1)$$
$$= 3.601324$$
$$f(x_2) = 0.000909$$
$$x_3 = x_2 - f(x_2) / f'(x_2)$$
$$= 3.601316$$
$$f(x_3) = -0.000013$$

إذن :

$$|f(x_3)| < 10^{-4}$$

وبالتالي نتوقف عند x_3 كما هو مطلوب، وتعتبر هي الحل التقريبي .

برنامج لطريقة نيوتن

والآن نكتب برنامجاً بلغة فورتران لحل المعادلة:

$$f(x) = 2\cos x - x^2 = 0$$

بطريقة نيوتن، مع أخذ $x_0 = 1$، وإيقاف الدورات إذا تحقق أحد الشرطين:

$$|x_{i+1} - x_i| < 10^{-5} \quad \text{أو} \quad |f(x_i)| < 10^{-6}$$

أو عندما يصل عدد الدورات إلى 20 دورة .


```
c       .... NEWTON'S METHOD........
             F(X) = 2 * COS (X) - X*X
c..     ...  FD(X) IS DERIVATIVE of F(x)
             FD(X) = - 2 * SIN (X) - 2*X
             A = 1
             MAX = 20
             EPS = 0.000001
             DEL = .00001
             DO 50 I = 1, MAX
                FA = F(A)
                FDA = FD(A)
                IF (ABS (FA) · LT. EPS) GO TO 60
                IF (ABS (DFA). LE. EPS) GO TO 100
                B = A - FA/ FDA
                IF (ABS (B - A) . LT . DEL) GO TO 60
                A = B
50           CONTINUE
60           WRITE (*, 80) A, FA, I
80           FORMAT (1X, 'ROOT = ', E 15.6,
            * 'F (ROOT) = ', E 15.6, 5X, 'ITER = ', I3)
             STOP
100          WRITE (*, 120)
120          FORMAT (5x, 'DERIVATIVE IS 'ZERO')
             STOP
             END
```

تطبيقات على طريقة نيوتن

مثال (6.2) :

(إيجاد الجذر التربيعي)

أوجد الجذر التربيعي $\sqrt{a}$ للعدد $a > 0$ بطريقة نيوتن مع التطبيق لإيجاد $\sqrt{2}$.

نوجد الحل للمعادلة $f(x) = x^2 - a = 0$، وبذلك يمكن تبسيط قاعدة نيوتن لهذه الدالة كما يلي:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2 - a}{2x_i}$$

أي أن :

$$x_{i+1} = \frac{x_i^2 + a}{2x_i} \qquad (6.3)$$

وبذلك، فإذا عرفنا الدالة :

$$g(x) = \frac{x^2 + a}{2x}$$

فإن قاعدة نيوتن تصبح على النحو: $x_{i+1} = g(x_i)$

فمثلاً إذا كانت $a = 2$ وأخذنا القيمة الابتدائية : $x_0 = 1$

فإن :

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{(1.5)^2 + 2}{2(1.5)} = 1.4166667$$

$$x_3 = g(x_2) = 1.4142157$$

$$x_4 = g(x_3) = 1.4142136$$

وبما أن الفرق $|x_4 - x_3| = .0000021$

يعتبر صغيراً نسبياً، فيمكن الاكتفاء بأربع دورات وأخذ x_4 كقيمة تقريبية للجذر $\sqrt{2}$. وإذا أردنا دقة أفضل، نحسب دورات أكثر.

مثال (6.3) :

(إيجاد المعكوس الضربي)

أوجد القيمة التقريبية للمعكوس الضربي $\frac{1}{a}$

لأي عدد a لا يساوي صفراً، وذلك بحل المعادلة :

$$f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$$

وطبق الطريقة لحساب 1/7 ، ابتداء من $x_0 = 0.2$

نلاحظ أن :

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a - \frac{1}{x_i}}{\frac{1}{x_i^2}}$$

$$= x_i - ax_i^2 + x_i$$

$$x_{i+1} = x_i (2 - a\, x_i) \qquad (6.4)$$

ومرة أخرى، يمكن وضع طريقة نيوتن على النحو:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

ولكن الآن : $g(x) = x(2 - ax)$

وعلى سبيل المثال، نضع $a = 7$ (أي أن المطلوب حساب $\frac{1}{7}$)

ولتكن القيمة الابتدائية هي:

$$x_0 = 0.2$$

إذن :

$$x_1 = g(x_0) = 0.2\,(2 - 2(0.2)) = 0.12$$

وهكذا، فإن :

$$x_2 = g(x_1) = 0.1392$$

$$x_3 = g(x_2) = 0.1427635$$

$$x_4 = g(x_3) = 0.1428508$$

$$x_5 = g(x_4) = 0.14285714$$

ومن الواضح أن x_5 لا تختلف كثيراً عن x_4، ويمكن اعتبارها المعكوس للعدد 7.

ملاحظة :

يتبين من القاعدة (6.4) أنه من الناحية النظرية يمكن أن تغني عملية الضرب عن عملية القسمة، ذلك لأن القاعدة (6.4) تفيد بأن عملية القسمة ما هي إلا سلسلة من عمليات الضرب تؤول في النهاية إلى ناتج القسمة، فلإيجاد

$$c = a/b = ab^{-1}$$

نوجد المعكوس b^{-1} **بواسطة (6.4)** ثم نضرب الناتج في a .

1.7 طريقة النقطة الثابتة (Fixed-Point Method)

تعتمد هذه الطريقة على تحويل المعادلة $f(x) = 0$ إلى شكل مكافىء لها على **النحو:**

$$x = g(x)$$

ثمّ استعمال القاعدة التكرارية :

$$x_{i+1} = g(x_i) \qquad (7.1)$$

وكمثال على ذلك، القاعدة (6.4) و (6.5) في طريقة نيوتن، والنقطة r التي **تحقق :**

$$r = g(r)$$

تسمى نقطة ثابتة للدالة $g(x)$**، ومن هنا جاءت تسمية هذه الطريقة.**

مثال (7.1) :
اكتب المعادلة :

$$f(x) = x^2 - 7x + 10 = 0$$

على النحو $x = g(x)$.

بالإمكان وضع هذه المعادلة على النحو المطلوب بعدة طرق، نختار منها ما يلي:

1 - $$g(x) = \frac{x^2 + 10}{7} = x$$

2 - $$g(x) = \sqrt{7x - 10} = x$$

3 - $$g(x) = x^2 - 6x + 10 = x$$

والآن نستعمل طريقة نيوتن، وذلك بوضع :

$$- g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

لنحصل على :

$$g(x) = \frac{x^2 - 10}{2x - 7}$$

مثال (7.2) :
استعمل طريقة النقطة الثابتة لإيجاد حل تقريبي للمعادلة

$$x = \cos x$$

مبتدئاً بالقيمة $x_0 = 1$ مع التوقف عندما $|x_i - x_{i-1}| < 0.002$

من الواضح هنا أن أبسط شكل للدالة $g(x)$ هو:

$$g(x) = \cos(x)$$

وبالتالي فإن:

$$x_1 = g(x_0) = \cos(1) = 0.540302$$
$$x_2 = g(x_1) = 0.857553$$
$$x_3 = g(x_2) = 0.654290$$

....

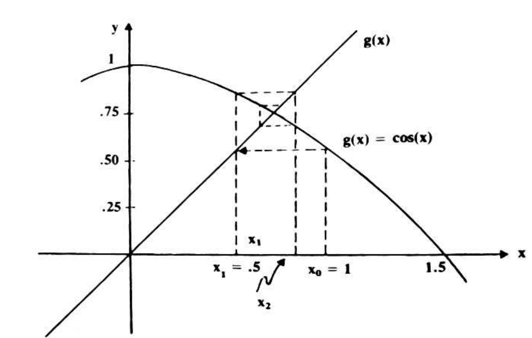
$$x_{14} = 0.738369$$
$$x_{15} = 0.739560$$

وبما أن :

$$|x_{15} - x_{14}| = .001191 < .002$$

فنتوقف عن الدورات كما هو مطلوب.

وبالإمكان توضيح هذا المثال بالرسم التالي (شكل 7.1).



شكل (7.1)

ويمكن الآن تلخيص طريقة النقطة الثابتة في الخطوات التالية:

1 - حدد المعطيات: $g(x)$، x_0، max، ϵ.

2 - نفذ الخطوات (3) إلى (6) من $i = 1$ إلى $i = max$.

3 - أحسب $x_{i+1} = g(x_i)$

4 - إذا كان $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$ توقف.

5 - إرجع إلى الخطوة (3).

وهذه الخطوات تكتب في برنامج فرعي بلغة فورتران كما يلي:

```
SUBROUTINE FPM (G, XO, MAX, EPS, X1, I)
DO 100 I = 1, MAX
X1 = G (XO)
IF (ABS (X1 - XO) · LT · EPS) RETURN
XO = X1
100 CONTINUE
RETURN
END
```


1.8 تقدير الخطأ في طريقة النقطة الثابتة

إذا اعتبرنا أن x_{i+1} هي القيمة التقريبية للقيمة r حيث:

$$x_{i+1} = g(x_i),\ r = g(r)$$

فإن الخطأ المطلق في هذا التقريب هو:

$$e_{i+1} = r - x_{i+1} = g(r) - g(x_i) \qquad (8.1)$$

وإذا كانت الدالة $g(x)$ قابلة للتفاضل عدد n من المشتقات، فباستعمال متسلسلة تايلور **Taylor's series** نحصل على:

$$g(x_i) = g(r) + (x_i - r)\, g'(r) + \frac{1}{2}(x_i - r)^2 g''(r) + \dots + \frac{1}{n!}(x_i - r)^n g^{(n)}(\xi_i) \qquad (8.2)$$

حيث ξ_i نقطة تقع في داخل الفترة $[x_i, r]$. من (8.1) و (8.2) نحصل على:

$$e_{i+1} = e_i\, g'(r) - \frac{1}{2} e_i^2 g''(r) + \dots \pm \frac{1}{n!} e_i^n g^{(n)}(\xi_i) \qquad (8.3)$$

وبالخصوص، إذا كانت $n = 1$ فإن:

$$e_{i+1} = e_i\, g'(\xi_i) \qquad (8.4)$$

وبالمثل فإن:

$$e_i = e_{i-1}\, g'(\xi_{i-1}) \qquad (8.5)$$

حيث ξ_{i-1} تقع بين r و x_{i-1}.

أي أن:

$$e_{i+1} = g'(\xi_i)\, g'(\xi_{i-1})\, e_{i-1}$$

وهكذا نحصل على:

$$e_{i+1} = g'(\xi_i)\, g'(\xi_{i-1}) \dots g'(\xi_0)\, e_0$$

فإذا وجدت قيمة موجبة k بحيث:

$$|g'(x)| \le k$$

في فترة I تحتوي على ξ_0، ξ_1، . . . ξ_i فإن:

$$|e_{i+1}| \le k^{i+1}|e_0| \qquad (8.6)$$

لاحظ أن هذه المتباينة تحدد أعلى قيمة للخطأ المطلق في الدورة i + 1 وهي مشروطة بوقوع ξ_j في الفترة I حيث j = 0، 1، 2، . . . ، i

فإذا افترضنا أن x_0 و x_1 و r تقع في I وأن k أقل من الواحد فإن x_2, x_3، . . . كلها تقع في الفترة I لأن (باستعمال متسلسلة تايلور):

$$\begin{aligned} x_2 &= g(x_1) \\ &= g(x_0) + (x_1 - x_0)\, g'(z_0) \\ &= x_1 + (x_1 - x_0)\, g'(z_0) \end{aligned}$$

حيث z_0 تقع بين x_0 و x_1. إذن:

$$|x_2 - x_1| \le |x_1 - x_0|\,|g'(z_0)| < |x_1 - x_0|$$

وهذا يعني أن x_2 تنتمي إلى I وبالتالي فإن x_3, x_4، . . . تنتمي إلى I بالطريقة نفسها. وحيث إن r تنتمي إلى I و ξ_i تقع بين x_i و r فإن ξ_i تنتمي إلى I.

ونستخلص من (8.6) وافتراض أن k أقل من الواحد أن الخطأ المطلق يؤول إلى الصفر عندما يؤول عدد الدورات i إلى ما لا نهاية. وهي خاصية التقارب المهمة.

مبرهنة (7.1)

إذا كانت: $|g'(x)| \le k < 1$

لجميع قيم x في فترة I تحتوي على x_0، x_1، r فإن طريقة النقطة الثابتة:

$$x_{i+1} = g(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

تتقارب من الحل r للمعادلة: $x = g(x)$

مثال (8.1):

بيّن أن المعادلة $x = \cos(x)$ يمكن حلها بطريقة النقطة الثابتة:

$$x_{i+1} = \cos(x_i)$$

مع ضمان التقارب للحل إذا أخذنا $x_0 = 1$.

تتحقق شروط المبرهنة (1)، حيث:

$$x_1 = \cos(x_0) = 0.540302$$

و: $|g'(x)| = |-\sin x| \le \sin(1) < 1$

لجميع قيم x في الفترة:

$$I = [x_1, x_0] = [.540302, 1]$$

وبما أن الدالة $f(x) = x - \cos(x)$ تتغير إشارتها داخل هذه الفترة، نستنتج أن الجذر r يقع داخل I وبالتالي فإن x_i تؤول إلى r كلما ازدادت i. لاحظ هنا اعتبار $k = \sin(1)$.

1.9 تقدير الخطأ في طريقة نيوتن:

نلاحظ أن طريقة نيوتن لحل المعادلة $f(x) = 0$ تعتمد على القاعدة:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (9.1)$$

وهي حالة خاصة من طريقة النقطة الثابتة إذا اعتبرنا:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (9.2)$$

وبالتالي فبالإمكان تطبيق نظرية التقارب لهذه الطريقة. ونبدأ بتفاضل g(x) وهو:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

أي أن :

$$g'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2} \qquad (9.3)$$

ولذلك وبما أن $f(r) = 0$ فإن :

$$g'(r) = 0$$

بشرط أن $f'(r)$ لا تساوي صفراً. وهذا يعني أنه إذا كانت $g'(x)$ دالة مستمرة continuous في جوار r فإنه بالإمكان إيجاد فترة I تحتوي على r وتحقق :

$$|g'(x)| \leq k < 1$$

لجميع قيم x في الفترة I. فإذا اخترنا x_0 بحيث تنتمي كل من x_0 و x_1 إلى I، فإن طريقة نيوتن تؤدي إلى الحل المطلوب، ونحصل على خاصية التقارب.

ولتقدير الخطأ في الدورة $i + 1$ نستعمل (8.3) مع ملاحظة أن $g'(r) = 0$ لطريقة نيوتن، أي :

$$e_{i+1} = -\frac{1}{2}\, e_i^2\, g''(\xi_i) \qquad (9.4)$$

وهذا يعني أن الخطأ المطلق في كل دورة يتناسب تقريباً مع مربع الخطأ السابق. فإذا كان الخطأ في الدورة i صغيراً (أقل من واحد) فإنه في الدورة $i + 1$ يصغر أكثر. ولهذا يقال إن طريقة نيوتن من المرتبة الثانية **Second order**، وأحياناً نقول إن لها تقارباً تربيعياً.

مثال (9.1) :

بيِّن أن طريقة نيوتن لحل المعادلة $f(x) = x^3 - 3 = 0$

تتقارب إلى الحل الصحيح في حالة $x_0 = 2$.

لاحظ أن $r = \sqrt[3]{3}$ **و**

من الصيغة (9.3)

$$g'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$= (x^3 - 3)\,(6x) / (3x^2)^2$$

$$= 2\,(x^3 - 3) / (3x^3)$$

$$= 2/3 - 2/x^3$$

إذن فإن : $|g'(x)| < |$

لجميع قيم x التي تحقق : $x > \sqrt[3]{1.2}$

باختيار $x_0 = 2$

نحصل على : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{19}{12} < 2$

وبالتالي فإن x_0 و x_1 و r تنتمي إلى الفترة :

$$I = [\sqrt[3]{2}, 2]$$

وحيث إن $|g'(x)|$ هي أقل من الواحد في هذه الفترة، فإن التقارب يتحقق طبقاً للمبرهنة (7.1).

تمارين (3)

1 - استعمل طريقة نيوتن لحل المعادلة $x^3 + x \sin x = 2.85$ مبتدئاً بالقيمة $x_0 = 1$. توقف بعد 3 دورات، وبيِّن إجابتك بالرسم.

2 - ارسم منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ ثم أحسب 3 دورات في طريقة نيوتن مبتدئاً بالقيمة «أ» $x_0 = 3$، ثم «ب» $x_0 = 1$، ثم «حـ» $x_0 = 0$. بيِّن ما يحدث في كل حالة ووضح إجابتك على الرسم.

3 - أكتب برنامج فورتران للقيام بالحسابات في تمرين -2- مع وضع حد أعلى للدورات، وليكن 10؛ وإيقاف الدورات عندما $|f(x_i)| < .00001$ أو $|x_{i+1} - x_i| < .0001$، إطبع قيم x_i و $f(x_i)$ و $f'(x_i)$ في كل دورة.

4 - استعمل طريقة نيوتن لحساب الجذر التكعيبي للعدد 4 صحيحاً في 5 خانات عشرية. إبدأ بالقيمة $x_0 = 1.5$.

5 - أكتب البرنامج الفرعي FUNCTION ASQRT (A) الذي يحسب الجذر التربيعي للعدد الموجب A بطريقة نيوتن مبتدئاً بالقيمة $x_0 = A/2$ مع وقف الدورات عندما $|x_i^2 - A| < 10^{-7}$.

6 - أكتب برنامج فورتران الذي يحسب الجذور الثلاثة للدالة:

$$p(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

في هذا البرنامج تتم قراءة البيانات التالية:

x_0: القيمة الابتدائية لأحد الجذور الثلاثة.

max: الحد الأعلى للدورات.

ε: رقم التسامح.

a_i: (i = 1, 2, 3, 4) معاملات p(x).

استعمل طريقة نيوتن لإيجاد جذر حقيقي واحد ثم استعمل قانون حل معادلات الدرجة الثانية لإيجاد الجذرين الباقيين.

7 - بيِّن أن طريقة نيوتن لحل المعادلة $ax^3 - x + b = 0$ مكافئة لطريقة النقطة الثابتة $x_{i+1} = g(x_i)$ حيث:

$$g(x) = (2ax^3 - b) / (3ax^2 - 1)$$

8 - استعمل طريقة النقطة الثابتة لحل المعادلة $x = e^{-x}$ مبتدئاً بالقيمة $x_0 = 1$ ومنتهياً بالحالة $|x_{n+1} - x_n| \leqslant 10^{-3}$ وموضحاً إجابتك بالرسم.

9 - «أ» بيِّن أن الدالة:

$$g(x) = x^2 - 4/x$$

لها نقطة ثابتة عند $x = 2$.

«ب» بيِّن أن $x = 2$ تعتبر حلاً للمعادلة $f(x) = x^3 - x^2 - 4 = 0$

«جـ» بيِّن أن طريقة النقطة الثابتة لا تؤدي إلى الحل المطلوب لأي قيمة ابتدائية x_0 إذا استخدمنا الدالة g(x) في «أ».

«د» بيِّن أن طريقة نيوتن لحل المعادلة $f(x) = 0$ تؤدي إلى

$$g(x) = (2x^3 - x^2 + 4) / (3x^2 - 2x)$$

10 - باستخدام المبرهنة (7.1)

«أ» بيِّن أن طريقة النقطة الثابتة $x_{i+1} = e^{-x_i}$ تتقارب لحل المعادلة $x = e^{-x}$ لأي قيمة ابتدائية موجبة.

«ب» بيِّن أن طريقة نيوتن لحل المعادلة $x^2 - 2 = 0$ تتقارب للحل لأي قيمة ابتدائية أكبر من الواحد.

نموذج اختبار - 1 -

الزمن: 1:30 (ساعة ونصف)

س (1): «أ» بيّن أن الفترة (0.1, 0.2) تحتوي على جذر للمعادلة:

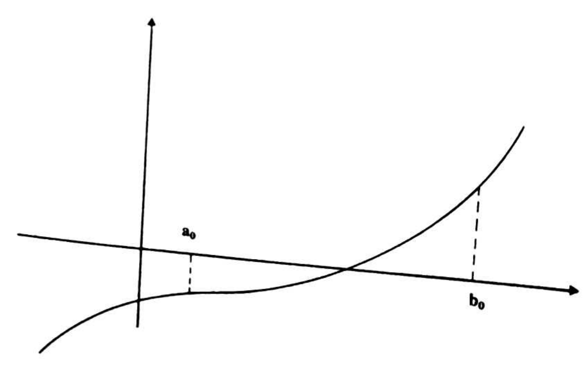
$$\frac{1}{x} - 7 = 0$$

«ب» استعمل دورتين في طريقة التنصيف لحساب جذر المعادلة في «أ» مع استعمال الفترة الابتدائية (0.1, 0.2).

«حـ» أحسب الحد الأعلى للخطأ المطلق إذا كان عدد الدورات في الفقرة «أ» خمس دورات.

«د» أحسب دورة واحدة في طريقة الوضع الخاطىء لحساب جذر المعادلة في الفقرة «ب» مستعملاً الفترة الابتدائية (0.1, 0.2).

س (2): «أ» بيّن على الرسم المرفق دورتين لطريقة الوضع الخاطىء.



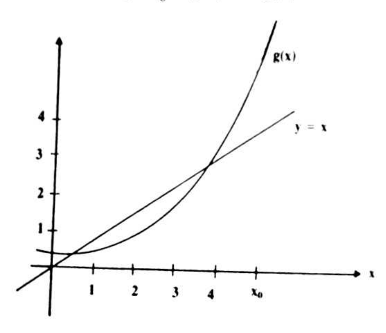
«ب» استنتج العلاقة:

$$c_i = \frac{a_i b_i + 7}{a_i + b_i}$$

من تطبيق طريقة القاطع في حل المعادلة $x^2 - 7 = 0$

«حـ» استخدم العلاقة في «ب» في كتابة برنامج لحساب وطباعة c_i من $i = 1$ إلى $i = 10$ مبتدئاً بالقيم $a_1 = 2$ و $b_1 = 3$.

س (3): «أ» بين على الرسم المرفق ما إذا كانت طريقة النقطة الثابتة $x_{i+1} = g(x_i)$ تؤدي (أو لا تؤدي) إلى تقارب نحو أحد جذري المعادلة $x = g(x)$ بالقيمة x_0 المبينة.



«ب» استخدم طريقة نيوتن لحساب الجذر التربيعي $\sqrt{5}$ مبتدئاً بالقيمة $x_0 = 2$ وحساب دورة واحدة فقط.

«حـ» أكتب البرنامج الفرعي FUNCTION SROOT (A) الذي يحسب الجذر التربيعي للعدد الموجب A. في حالة A سالبة فإنه يطبع إنذاراً بذلك ويتوقف. استعمل طريقة نيوتن مع أخذ $x_0 = A/2$ والتوقف عندما:

$$|x_i^2 - A| < 0.000001$$

الفصل الثاني

حل معادلات ذات اكثر من مجهول

Solution of Equations of Several Variables

2.1 مقدمة

إذا كانت الطرق العددية ضرورية لكثير من المعادلات ذات المجهول الواحد، فإنها أكثر أهمية وضرورة إذا زاد عدد المجاهيل عن ذلك. نبدأ أولاً بالمثال البسيط التالي:

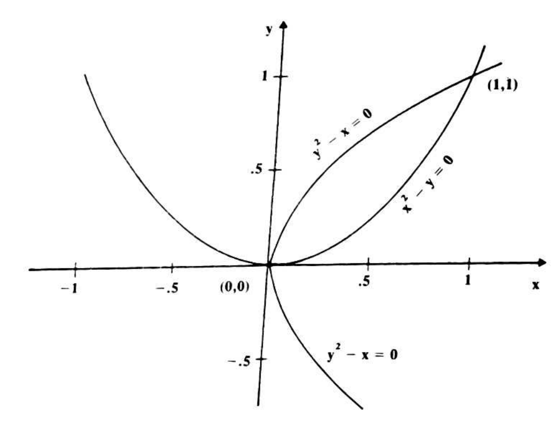
مثال (1.1):
أوجد حل المعادلتين الآتيتين:

$$f(x, y) = x^2 - y = 0$$
$$g(x, y) = y^2 - x = 0$$

الحل في هذه الحالة بسيط حيث من المعادلة الأولى يمكن وضع $y = x^2$ وبالتالي تعويضاً في المعادلة الثانية فإن $x^4 - x = 0$، أي أن الحل هو النقطتان:

$$y = 0, x = 0 \quad \text{و} \quad x = 1, y = 1$$

ويمكن تمثيل المعادلتين بالرسم كما في شكل (1.1).



شكل (1.1)

لاحظ أن الجذور المطلوبة وهي في هذه الحالة (0,0) ،(1,1) هي نقطتا تقاطع المنحنيين.

مثال (1.2) :
اكتب الصورة العامة للمعادلات الخطية الآتية :

الصورة هي :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n - b_1 = 0$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n - b_2 = 0 \qquad (1.1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n - b_n = 0$$

حيث a_{ij} تسمى المعاملات و b_i الثوابت و x_i هي المتغيرات المجهولة وعددها n وهي أيضاً عدد المعادلات. إذا عرفنا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \\ \ldots & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.2)$$

والمتجهين :

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

فإن نظام المعادلات (1.1) يمكن كتابته على الشكل :

$$AX - B = 0 \qquad (1.4)$$

وهذا النظام - كما هو معلوم في دراسة الجبر الخطي - له حل واحد إذا كانت محددة المصفوفة A لا تساوي صفراً.
وإذا عرفنا الدالة F بأنها :

$$F(X) = AX - B \qquad (1.5)$$

فإن النظام (1.1) يمكن كتابته على النحو $F(X) = 0$ كما هو الحال في المعادلات ذات المجهول الواحد. إلا أنه يجب ملاحظة أن هذا الشكل ليس ممكناً في كثير من الأحيان وبالذات إذا كانت المعادلات غير خطية.

2.2 طريقة جاكوبي Jacobi Method

في هذه الطريقة نستعمل طريقة النقطة الثابتة وذلك بتحويل نظام المعادلات $F(X) = 0$ إلى الشكل :

$$X = G(X) \qquad (2.1)$$

ثم حساب المتجهات $X^{(1)}$ ، $X^{(2)}$ ، $X^{(3)}$ ، ... من متجه ابتدائي $X^{(0)}$ بحيث:

$$X^{(k+1)} = G(X^k) \qquad (2.2)$$

وحيث الدليل الفوقي k يعني المتجه عند الدورة k.

وبالتحديد إذا كانت $F(X)$ هي الدالة الخطية (1.5) فإن:

$$G(X) = D^{-1}[B - (A - D)X] \qquad (2.3)$$

حيث D هي المصفوفة القطرية:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

ومعكوسها D^{-1} هو أيضاً مصفوفة قطرية. لاحظ أن التعريف (2.3) يجعل (2.1) مكافئة للنظام $AX = B$، وذلك لأن (2.1) تعني في هذه الحالة أن:

$$\begin{aligned} x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{1n}x_n)/a_{22} \\ &\dots\dots \\ x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1})/a_{nn} \end{aligned} \qquad (2.5)$$

أو بصورة أخرى فإن (2.1) تكافىء:

$$x_i = \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j \right] / a_{ii} \qquad (2.6)$$

حيث $i = 1$، 2، ....، n.

مثال (2.1):

حل المعادلات التالية بطريقة جاكوبي:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \quad &= 5 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 &= -6 \\ 2x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

إبدأ بالقيم الابتدائية:

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$$

أحسب 3 دورات وقارن بالحل الصحيح:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$$

في البداية نضع المعادلات على الصورة:

$$\begin{aligned} x_1 &= (5 - x_2)/3 \\ x_2 &= (-6 - x_1 + x_3)/(-4) \\ x_3 &= (-1 - 2x_2)/5 \end{aligned}$$

وفي الدورة الأولى نحصل على:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= (5 - x_2^{(0)})/3 = 1.3333 \\ x_2^{(1)} &= (-6 - x_1^{(0)} + x_3^{(0)})/(-4) = 1.5 \\ x_3^{(1)} &= (-1 - 2x_2^{(0)})/5 = -0.6 \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة، نحصل في الدورة الثانية على:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= (5 - x_2^{(1)})/3 = 1.6667 \\ x_2^{(2)} &= (-6 - x_1^{(1)} + x_3^{(1)})/(-4) = 1.9833 \\ x_3^{(2)} &= (-1 - 2x_2^{(1)})/5 = -0.8 \end{aligned}$$

وفي الدورة الثالثة :

$$x_1^{(3)} = 1.0055$$

$$x_2^{(3)} = 2.1167$$

$$x_3^{(3)} = -0.9933$$

ومن الواضح ، أننا نقترب شيئاً فشيئاً من الحل الصحيح

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = -1$$

والآن يمكن تحديد طريقة جاكوبي لحل المعادلات $X = G(X)$ في خوارزمية التالية :

1 ـ حدد المعطيات : $G(X)$ (وهي عدد n من الدوال في n متغير)
و ε (رقم التسامح) و max (الحد الأعلى للدورات)
و $X^{(0)}$ (المتجه الابتدائي) .

2 ـ نفذ الخطوات التالية من $i = 1$ إلى $i = max$.

3 ـ أحسب $X^{(1)} = G(X^{(0)})$.

4 ـ أحسب t أكبر عنصر (في القيمة المطلقة) للمتجه :

$$E = X^{(1)} - X^{(0)}$$

أي أن
$$t = \max_{0 \leq j \leq n} \left| x_j^{(1)} - x_j^{(0)} \right|$$

5 ـ إذا كانت $t < \varepsilon$ فاطبع $X^{(1)}$ وتوقف .

6 ـ استبدل قيمة $X^{(0)}$ بالمتجه $X^{(1)}$.

7 ـ ارجع إلى الخطوة (3) .

وبالإمكان الآن كتابة برنامج فورتران لهذه الطريقة مستعملين المعادلات في مثال (1)، والتي منها نعرف الدالة التالية :

```
      FUNCTION G (I, X, N)
      DIMENSION X(N)
      IF (I. EQ. 1) G = (5 - X (2))/ 3
      IF (I. EQ. 2) G = (- 6 - X (1) + X(3))/ (-4)
      IF (I. EQ. 3) G = (- 1. - 2* X (2))/ 5
      RETURN
      END
```

وحيث إن الخطوة «4» تستلزم حساب أكبر عنصر في متجه E، نكتب البرنامج الفرعي التالي :

```
      SUBROUTINE MAXIM (E, N, T)
      DIMENSION E (N)
      T = 0
      DO 10 I = 1, N
      AE = ABS (E (I))
      IF (AE. GT. T) T = AE
10    CONTINUE
      RETURN
      END
```

والآن يمكن كتابة برنامج فرعي لطريقة جاكوبي كالآتي. لاحظ أن القيم الابتدائية للمتجه X يتم تعريفها في البرنامج الرئيسي وأن XNEW هو متجه الحل.

```
      SUBROUTINE JACOBI (X, G, N,EPS, MAX, XNEW, I, E)
      DIMENSION X(N), XNEW(N), E(N)
      DO 100 I = 1, MAX
      DO 10 J = 1, N
10    XNEW (J) = G (J, X, N)
      DO 20 J = 1, N
20    E(J) = XNEW (J) - X(J)
      CALL MAXIM (E, N, T)
      IF (T. LT. EPS) RETURN
      DO 30 J = 1, N
30    X(J) = XNEW (J)
100   CONTINUE
      RETURN
      END
```

2.3 طريقة جاوس - سيدل (Gauss-Seidel Method)

لحل المعادلات التالية والتي عددها n :

$$x_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$x_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\vdots \qquad (3.1)$$
$$x_n = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

نستعمل في طريقة جاوس - سيدل التتابع التالي:

$$x_1^{(k+1)} = g_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = g_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$$
$$x_n^{(k+1)} = g_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)})$$

أو بصورة عامة :

$$x_i^{(k+1)} = g_i(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \qquad (3.2)$$

حيث i من 1 إلى n . إذن فالفرق بين طريقة جاكوبي وطريقة جاوس - سيدل أن في الدورة k+1 نستعمل في طريقة جاكوبي قيم x_i من الدورة السابقة k فقط، بينما نستعمل في طريقة جاوس - سيدل آخر قيمة تم حسابها.

في حالة أن g_i دوال خطية، أي أن نظام المعادلات على الصورة (2.5)، فإن (3.2) يمكن وضعها على الصورة:

$$x_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] / a_{ii} \qquad (3.3)$$

مثال (3.1) :

حل المعادلات الخطية الآتية في المثال (2.1) بطريقة جاوس - سيدل، مبتدئاً بنفس القيم الابتدائية مع حساب 3 دورات فقط.

كما في طريقة جاكوبي، نضع المعادلات أولاً على الصورة:

$$x_1 = (5 - x_2)/3$$
$$x_2 = (-6 - x_1 + x_3)/(-4)$$
$$x_3 = (-1 - 2x_2)/5$$

وابتداء من $x_3^{(0)} = x_2^{(0)} = x_1^{(0)} = 1$ نحصل في الدورة الأولى على:

$$x_1^{(1)} = (5 - x_2^{(0)})/3 = 1.3333$$
$$x_2^{(1)} = (-6 - x_1^{(1)} + x_3^{(0)})/(-4) = 1.5832$$
$$x_3^{(1)} = (-1 - 2x_2^{(1)})/5 = -0.8332$$

وبالطريقة نفسها نحصل في الدورة الثانية على:

$$x_1^{(2)} = (5 - x_2^{(1)})/3 = 1.1389$$
$$x_2^{(2)} = (-6 - x_1^{(2)} + x_3^{(1)})/(-4) = 2.0416$$
$$x_3^{(2)} = (-1 - 2x_2^{(2)})/5 = -1.0166$$

وفي الدورة الثالثة:

$$x_1^{(3)} = 0.9861$$
$$x_2^{(3)} = 2.0007$$
$$x_3^{(3)} = -1.0003$$

ومقارنة بالحل الصحيح:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = -1$$

نجد أن طريقة جاوس - سيدل قد أعطت في هذا المثال نتائج أفضل من طريقة جاكوبي، وهذا متوقع حيث إننا نستعمل في طريقة جاوس - سيدل القيمة $x_i^{(k+1)}$ في الدورة $(k+1)$ وهي أقرب إلى الحل الصحيح من $x_i^{(k)}$.

نلاحظ أن الخطوات التي تحدد طريقة جاوس - سيدل هي نفسها المستعملة في طريقة جاكوبي مع اختلاف الخطوة رقم (3) حيث لا بد هنا من استعمال (3.2). وتتضح هذه الخطوات في البرنامج التالي الذي يستعمل الدالة نفسها G المعرّفة في البرنامج السابق لطريقة جاكوبي.

```
      SUBROUTINE GSM (X, G, N, EPS, MAX, XNEW, I, E)
      DIMENSION X (N), XNEW (N), E (N)
      DO 100 I = 1, MAX
      DO 10 J = 1, N
10    XNEW (J) = G (J, XNEW, N)
      DO 20 J = 1, N
20    E (J) = XNEW (J) - X (J)
      CALL MAXIM (E, N, T)
      IF (T. LT. EPS) RETURN
      DO 30 J = 1, N
30    X (J) = XNEW (J)
100   CONTINUE
      RETURN
      END
```

2.4 شروط كافية لتقارب طريقة جاكوبي وطريقة جاوس - سيدل

تعتبر الطريقتان المذكورتان من الطرق التتابعية (iterative) وذلك تمييزاً لها عن الطرق المباشرة (direct methods). وتمتاز الطرق التتابعية بأنها صالحة لحل المعادلات الخطية وغير الخطية على حد سواء، وهذه ميزة مهمة جداً حيث إن

أكثر المعادلات التي تواجه العلماء والمهندسين عادة ما تكون غير خطية. ولكن تبقى المشكلة التي تواجه الطرق التتابعية وهي عدم ضمان التقارب إلى الحل الصحيح إلّا في حالات معينة. ولدراسة هذه الحالات، نبدأ بمتسلسلة تايلور لدالة ذات أكثر من متغير واحد حول نقطة الحل $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$g_i\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_3)$$
$$+\Delta x_1^{(k)} \frac{\partial g_i}{\partial x_1}\left(\xi_1^{(k)}, x_2, \ldots, x_n\right) + \Delta x_2^{(k)} \frac{\partial g_i}{\partial x_2}\left(x_1, \xi_2^{(k)}, \ldots x_n\right)$$
$$+ \ldots + \Delta x_n \frac{\partial g_i}{\partial x_n}\left(x_1, x_2, \ldots, \xi_n^{(k)}\right)$$

حيث $\xi_i^{(k)}$ هي قيم مجهولة تقع بين x_i و $x_i^{(k)}$، وحيث:

$$\Delta x_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_i$$

تمثل مقدار الخطأ في التقدير $x_i^{(k)}$.

إذا استعملنا طريقة جاكوبي، فإننا نحصل على:

$$x_i^{(k+1)} = x_i + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) \Delta x_j^{(k)} \quad (4.2)$$

حيث يقيّم التفاضل الجزئي عند النقطة $(x_1, \ldots, \xi_j^{(k)}, \ldots, x_n)$. والآن إذا فرضنا أن:

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right| \leq \sigma < 1 \quad (4.3)$$

في نطاق يحتوي على نقطة الحل والنقط التقريبية، فإنه من (4.2) ينتج أن:

$$\left|\Delta x_i^{(k+1)}\right| \leq \sigma_i \max_j \left|\Delta x_j^{(k)}\right| \quad (4.4)$$

حيث $\max_j$ تعني أكبر قيمة تأخذها $|\Delta x_j^{(k)}|$ لجميع قيم j (من 1 إلى n). إذا طبقنا العلاقة (4.4) من $k = 0$ إلى $k = m$ نحصل على:

$$\left|\Delta x_i^{(m+1)}\right| \leq \sigma^m \max_j \left|\Delta x_j^{(0)}\right| \quad (4.5)$$

وحيث إن σ تم افتراضها بأنها أقل من الواحد فإن:

$$\sigma^m \to 0$$

كلما زادت قيمة m، وبالتالي فإن الخطأ $\Delta x_i^{(m+1)}$ يؤول إلى الصفر **ويحدث التقارب المطلوب**.

لاحظ أن شرط التقارب (4.3) قد يكون صعب التحقيق من الناحية العملية **وذلك لاشتراط صحته في نطاق يحتوي** على جميع النقط التقريبية ونقطة الحل، **ولكن النتيجة التي تحصلنا عليها** مفيدة جداً في حد ذاتها كما سيتضح فيما بعد.

أول تطبيق لهذه النتيجة هو حل المعادلات الخطية بطريقة جاكوبي حيث:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Big[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_j\Big] / a_{ii} \qquad (4.4)$$

ومنها نحصل على:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

وبالتالي:

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$$

إذن يتحقق التقارب نحو الحل إذا تحققت الحالة:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \qquad (4.5)$$

وهي تعني أن العناصر القطرية أكبر من حيث القيمة المطلقة من مجموع بقية العناصر في الصف نفسه، وتوصف مثل هذه المصفوفات بأنها ذات قطر سائد Diagonally dominant matrix. الشرط (4.5) هو أيضاً صالح لطريقة جاوس - سيدل، أي أن هذه الطريقة تحقق التقارب إذا استوفت المعادلات الخطية هذا الشرط. إلّا أن إثبات ذلك يختلف بعض الشيء عن البرهان الذي قدمناه لطريقة جاكوبي.

مثال (4.1):
بيّن أن طريقة جاكوبي أو طريقة جاوس - سيدل تحقق التقارب عند حل المعادلات التالية:

$$5x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 = -1$$
$$2x_1 - x_2 + 6x_3 = 8$$

نلاحظ هنا أن:

$$|a_{11}| = 5 > |1| + |-2| = |a_{12}| + |a_{13}|$$

$$|a_{22}| = 4 > |1| + |1| = |a_{21}| + |a_{23}|$$

$$|a_{33}| = 6 > |2| + |-1| = |a_{31}| + |a_{32}|$$

وهو الشرط الكافي لتحقيق التقارب في كلتا الطريقتين.

ملاحظة:

حيث إن ترتيب المعادلات **لا يؤثر على الحل الصحيح لهذه المعادلات، فمن** الأفضل ترتيب هذه المعادلات بحيث يكون **المعامل القطري أكبر ما يمكن من** حيث القيمة المطلقة، **وذلك لغرض إحداث التقارب.**

مثال (4.2):
رتّب المعادلات التالية بطريقة مناسبة لطريقة جاكوبي أو جاوس - سيدل:

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -7$$
$$2x_1 + x_3 = 3$$

هذه المعادلات يجب ترتيبها على النحو التالي:

$$2x_1 + x_3 = 3$$
$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3$$

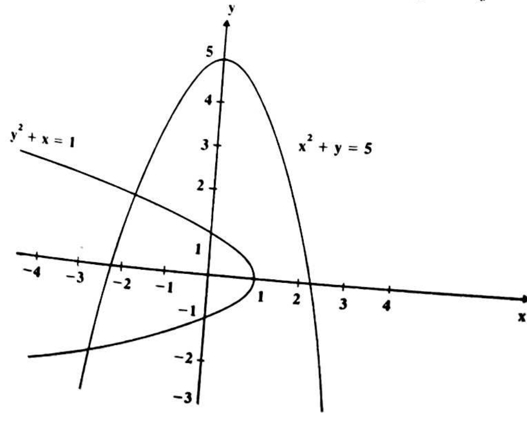
بحيث أصبح العنصر القطري أكبر ما يمكن.

مثال (4.3):

اكتب الصيغة المناسبة لحل المعادلتين التاليتين بطريقة جاكوبي:

$$x^2 + y = 5$$
$$y^2 + x = 1$$

هاتان المعادلتان لها حلان حقيقيان، ويمكن الحصول على قيم تقريبية لهما من الرسم كما في شكل (2.1).



شكل (2.1)

واضح من الرسم أن نقطتي الحل هما تقريباً $(-2, 2)$, $(-2, -2)$. **لو** وضعنا:

$$x = g_1(x, y) \Rightarrow x = 1 - y^2$$
$$y = g_2(x, y) \Rightarrow y = 5 - x^2$$

فإن:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y} = -2y$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$$

إذن فعند النقطة $(-2,2)$ نجد أن:

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| \simeq 4$$
$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| \simeq 4$$

والقيم نفسها عند النقطة $(-2, -2)$. **وهذا يعني أن الشرط الكافي للتقارب** (4.3) **لا يتحقق، وعلينا إذن تغيير الدالتين g_1 و g_2 لتحقيق التقارب. إذا** أخذنا:

$$g_1(x, y) = -\sqrt{5-y}$$
$$g_2(x, y) = \sqrt{1-x}$$

فإن هاتين الدالتين لهما النقطة الثابتة نفسها وهي تقريباً $(-2, 2)$. نلاحظ الآن أن:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{1}{2}(5-y)^{-1/2}$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$$

وبالتالي فعند النقطة (2 ,2−) نجد أن:

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| = \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| = \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$$

وطبعاً هذا لا يعني أن شرط التقارب قد تحقق لأننا حققنا هذه المتباينة عند نقطة واحدة فقط بينما يجب تحقيقها في منطقة تحتوي على الحل وعلى النقطة الابتدائية. ولكن لقرب النقطة (2 ,2−) من الحل الصحيح، فإنها لو أخذت كنقطة ابتدائية، هناك احتمال كبير لتحقيق التقارب.

تمارين (1)

1 - بيِّن بالرسم أن المعادلتين الآتيتين لهما حلان:

$$x^2 - y = 1$$

$$x - y^2 = -2$$

وأوجد من الرسم القيم التقريبية لهذين الحلين.

2 - إذا كان عمر شخص x مضافاً إلى مربع عمر شخص آخر y يساوي 425 وكان مربع عمر x مضافاً إلى عمر y هو 645 فأوجد بالرسم عمر كل منهما.

3 - حل المعادلات التالية بطريقة جاكوبي:

$$10x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

$$x_1 + 10x_2 - x_3 + x_4 = 11$$

$$x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 9$$

$$x_2 + x_3 + 10x_4 = 12$$

ابتداء من: $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$

وحساب 3 دورات فقط.

4 - أكتب البرنامج الفرعي G(I, X, N) لوصف الدالة $g_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ في تمرين (3).

5 - أكتب البرنامج الفرعي G (I, X, N, A, B) لوصف الدالة:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j\right) / a_{ii}$$

واستعمل هذه الدالة لكتابة برنامج فرعي لحل المعادلات الخطية AX = B في N مجهول بطريقة جاكوبي.

6 - حلّ المعادلات في تمرين (3) بطريقة جاوس - سيدل.

7 - أكتب البرنامج المطلوب في تمرين (5) بطريقة جاوس - سيدل.

8 - «أ» بيِّن أن حل المعادلات في تمرين (1) يناظر النقاط الثابتة للدوال:

$$g_1(x, y) = y^2 - 2, \quad g_2(x, y) = x^2 - 1$$

«ب» بيِّن أن طريقة جاكوبي باستخدام هاتين الدالتين لا تؤدي إلى الحل.

«حـ» بيِّن أن استخدام الدوال التالية:

$$g_1(x, y) = \sqrt{1+y}, \quad g_2(x, y) = \sqrt{x+2}$$

في طريقة جاكوبي يؤدي إلى الحل الموجب إذا كانت نقطة البداية قريبة من هذا الحل. (أي الحل الذي يقع في المنطقة $(y > 0, x > 0)$.

9 - رتِّب المعادلات التالية بطريقة مناسبة لاستخدام طريقة جاكوبي وجاوس - سيدل:

$$x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 = 2$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = -4$$

$$2x_1 + x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 3$$

10 - أكتب البرنامج الفرعي SUBROUTINE REARG (A, B, N, C, D) الذي يقوم بترتيب المعادلات AX = B وتصبح CX = D حتى يكون التقارب في طريقة جاكوبي أو جاوس - سيدل أكثر احتمالاً .

11 - استعمل البرنامج الفرعي في تمرين (10) في برنامج رئيسي لحل المعادلات الخطية AX = B . افترض أن N = 10 وأن المعاملات تتم قراءتها في البرنامج .

الفصل الثالث

حل المعادلات الخطية بالطرق المباشرة

Solution of Linear Equations by Direct Methods

تعتبر الطرق التتابعية وسيلة ضرورية لحل المعادلات غير الخطية، ولكن إذا كانت هذه المعادلات خطية فلدينا الاختيار بين استعمال هذه الطرق التتابعية أو الطرق الرياضية المباشرة المستعملة في الجبر الخطي، في هذا الفصل نناقش مزايا وعيوب هذا النوع من الطرق .

3.1 طريقة الحذف لجاوس

لتوضيح هذه الطريقة، ندرس الحالة n = 4 (أي أربع معادلات وأربعة مجاهيل) وهي :

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 &= b_2 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 &= b_3 \\
a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 &= b_4
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

الخطوة الأولى في الحل هي التخلص من x_1 في المعادلة الثانية والثالثة والرابعة. نضرب أولاً المعادلة الأولى في t_{21} حيث:

$$t_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} \quad (a_{11} \neq 0) \qquad (1.2)$$

وجمعها مع المعادلة الثانية لينتج :

$$a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + a_{24}^{(1)} x_4 = b_2^{(1)} \qquad (1.3)$$

حيث :

$$a_{2j}^{(1)} = a_{2j} + t_{21} a_{1j} \qquad (1.4)$$

$$j = 2, 3, 4$$

$$b_2^{(1)} = b_2 + t_{21} b_1 \qquad (1.5)$$

وبضرب المعادلة الأولى في :

$$t_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} \qquad (1.6)$$

وإضافة الناتج للمعادلة الثالثة نحصل على :

$$a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 + a_{34}^{(1)} x_4 = b_3^{(1)} \qquad (1.7)$$

حيث :

$$a_{3j}^{(1)} = a_{3j} + t_{31} a_{1j} \qquad (1.8)$$

و :

$$b_3^{(1)} = b_3 + t_{31} b_1 \qquad (1.9)$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على المعادلة :

$$a_{42}^{(1)} x_2 + a_{43}^{(1)} x_3 + a_{44}^{(1)} x_4 = b_4^{(1)} \qquad (1.10)$$

حيث :

$$a_{4j}^{(1)} = a_{4j} + t_{41} a_{1j} \qquad (1.11)$$

$$b_4^{(1)} = b_4 + t_{41} b_1 \qquad (1.12)$$

$$t_{41} = -\frac{a_{41}}{a_{11}} \qquad (1.13)$$

إذن للتخلص من x_1 في المعادلة الثانية والثالثة والرابعة نجري التحويل :

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + t_{ij} a_{1j} \qquad (1.14)$$

$$b_i^{(1)} = b_i + t_{i1} b_1 \qquad (1.15)$$

حيث :

$$i, j = 2, 3, 4$$

ويمكن التخلص من x_2 في المعادلة الثالثة والرابعة وذلك بإجراء التحويلات :

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + t_{i2} a_{2j}^{(1)} \qquad (1.16)$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + t_{i2} b_2^{(1)} \qquad (1.17)$$

حيث :

(بافتراض $a_{22}^{(1)} \neq 0$)

$$t_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{21}^{(1)}} \qquad (1.18)$$

$$i, j = 3, 4$$

وأخيراً، نتخلص من x_3 في المعادلة الرابعة بالتحويل :

$$a_{44}^{(3)} = a_{44}^{(2)} + t_{43} a_{34}^{(2)} \qquad (1.19)$$

$$b_4^{(3)} = b_4^{(2)} + t_{43} b_3^{(2)} \qquad (1.20)$$

حيث :

$$t_{43} = -\frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \quad (a_{33}^{(2)} \neq 0) \qquad (1.21)$$

وبذلك نكون قد حولنا نظام المعادلات (1.1) إلى الصورة المثلثية **triangular form**:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = b_2^{(1)}$$

$$a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = b_3^{(2)} \qquad (1.22)$$

$$a_{44}^{(3)}x_4 = b_4^{(3)}$$

وهو نظام سهل الحل بطريقة التعويض إلى الخلف **back-substitution**، أي:

$$x_4 = b_4^{(3)} / a_{44}^{(3)}$$

$$x_3 = [b_3^{(2)} - a_{34}^{(2)}x_4] / a_{33}^{(2)} \qquad (1.23)$$

$$x_2 = [b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_3 - a_{24}^{(1)}x_4] / a_{22}^{(1)}$$

$$x_1 = [b_1^{(0)} - a_{12}^{(0)}x_2 - a_{13}^{(0)}x_3 - a_{14}^{(0)}x_4] / a_{11}^{(0)}$$

مع ملاحظة أننا قد افترضنا أن $a_{ii}^{(k)}$ لا تساوي صفراً حيث $k = 0, 1, 2, 3$.

واعتبار:

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij},\ b_i^{(0)} = b_i \qquad (1.24)$$

والآن نحاول تعميم الخطوات السابقة لنظام معادلات من n معادلة، كما يلي:

1 ـ نفذ الخطوة (2) من $k=1$ إلى $k=n-1$.

2 ـ من $i=k+1$ إلى $i=n$، ومن $j=k+1$ إلى $j=n$،

أحسب:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + t_{ik}\, a_{kj}^{(k-1)} \qquad (1.25)$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} + t_{ik}\, b_k^{(k-1)} \qquad (1.26)$$

حيث:

$$t_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \qquad (1.27)$$

وعلى افتراض أن $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

3 ـ أوجد الحل بطريقة التعويض إلى الخلف، أي أحسب:

$$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)} \qquad (1.28)$$

ثم من $i = n - 1$ إلى $i = 1$ أحسب:

$$x_i = \left[b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j\right] / a_{ii}^{(i-1)} \qquad (1.29)$$

مثال (1.1):

حل المعادلات التالية بطريقة الحذف لجاوس.

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10$$

$$5x_1 + 4x_2 - x_3 = 14$$

أولاً نتخلص من x_1 في المعادلة الثانية وذلك بضرب المعادلة الأولى في t_{21} حيث:

$$t_{21} = -1/2 = -0.5$$

وإضافة الناتج للمعادلة الثانية لينتج:

$$1.5x_2 + 4.5x_3 = 7.5$$

وبنفس الطريقة نتخلص من x_1 في المعادلة الثالثة حيث:

$$t_{31} = -5/2 = -2.5$$

وينتج:

$$1.5x_2 + 1.5x_3 = 1.5$$

والآن نتخلص من x_2 في المعادلة الأخيرة وذلك بضرب المعادلة الثانية (الجديدة) في:

$$t_{32} = -1.5/1.5 = -1$$

وإضافتها للمعادلة الثالثة لينتج:

$$-3x_3 = -6$$

إذن يتحول نظام المعادلات إلى الصورة المثلثية التالية:

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 5$$
$$1.5x_2 + 4.5x_3 = 7.5$$
$$-3x_3 = -6$$

والحل الآن مباشر بطريقة التعويض إلى الخلف حيث:

$$x_3 = 2$$
$$x_2 = [7.5 - 2(4.5)]/1.5 = -1$$
$$x_1 = [5 - (-1) + 2]/2 = 4$$

ملاحظة:

عادة ما نكتب الحل باستعمال المصفوفات على النحو التالي (بالنسبة للمثال السابق):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 10 \\ 5 & 4 & -1 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1.5 & 4.5 & 7.5 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1.5 & 4.5 & 7.5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

عملية الارتكاز Pivoting

لقد تجنبنا حتى الآن التعرض للسؤال: ماذا لو كانت $a_{kk}^{(k-1)} = 0$؟ مثلاً: ماذا لو كانت a_{11} في البداية تساوي صفراً؟ وحيث إن ترتيب المعادلات لا يؤثر على الحل، فبالإمكان تجنّب هذه المشكلة باستبدال المعادلة الأولى بمعادلة أخرى ولتكن المعادلة رقم m بحيث a_{m1} لا يساوي صفراً، أو بطريقة أفضل نبحث عن المعادلة m التي فيها a_{m1} أكبر من a_{i1} لجميع قيم i من 1 إلى n. هذه العملية تجنبنا القسمة على الصفر إلى جانب التقليل من الخطأ الناتج عن التقريب، وتسمى هذه العملية بالارتكاز Pivoting كما يسمّى العنصر $a_{kk}^{(k-1)}$ عامل الارتكاز Pivot element. إذن بصورة عامة، فإن عملية الارتكاز هي إيجاد أكبر عنصر من حيث القيمة المطلقة في العمود $a_{ik}^{(k-1)}$ ابتداء من $i = k$ إلى $i = n$ واستبدال الصف الذي يقع فيه هذا العنصر بالصف $i = k$. أما إذا كان هذا العنصر الأكبر هو أيضاً يساوي صفراً فذلك يعني أن المحددة تساوي صفراً وليس هناك حل وحيد.

والآن نعيد خوارزمية الحذف لجاوس بصورة أكثر دقة:

1 - حدد المعطيات: - المصفوفة A ذات أبعاد $n \times n$.
- المتجه الثابت B ويتكون من n عنصر
- EPS (رقم صغير موجب لقياس عامل الارتكاز)

2 - ابتداءً من $k=1$ إلى $k=n-1$ نفذ الخطوات (3), (4).

3 - قم بعملية الارتكاز والاستبدال. إذا كان عامل الارتكاز صغيراً توقف.

4 - من $i = k + 1$ إلى $i = n$ وكذلك من $j = k + 1$ إلى $j = n$ أوجد:

$$t_{ik} = -a_{ik} / a_{kk}$$
$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + t_{ik} a_{kj}$$
$$b_i \leftarrow b_i + t_{ik} b_k$$

حيث السهم ← يعني عملية «إحلال محل».

5 - قم بعملية التعويض إلى الخلف كما في (1.28) و (1.29) لإيجاد الحل المطلوب.

لتحويل هذه الخطوات لبرنامج فورتران نبدأ أولاً بكتابة برنامج فرعي لعملية الارتكاز حيث يتم إيجاد أكبر عنصر أسفل العنصر القطري a_{kk} واستبدال الصفين L, K حيث a_{Lk} هو العنصر الأكبر قيمة مطلقة أسفل a_{kk}.

```
      SUBROUTINE PIVOT (A, B, N, K, L)
      DIMENSION A (N, N), B(N)
      K1 = K + 1
      L = K
      BIG = A (K, K)
      DO 10 I = K1, N
      IF (ABS (A(I, K)) - ABS (BIG)) 10, 10, 20
20    BIG = A (I, K)
      L = I
10    CONTINUE
C
      IF (L. EQ. K) RETURN
      DO 30 J = K, N
      TEMP = A (K, J)
      A(K, J) = A (L, J)
      A (L, J) = TEMP
30    CONTINUE
      TEMP = B (K)
      B(K)= B(L)
      B(L) = TEMP
      RETURN
      END
```

البرنامج الفرعي الآخر الذي نحتاج إليه في كتابة برنامج الحذف لجاوس هو البرنامج الذي يقوم بعملية التعويض إلى الخلف واسمه BKSUB. وهذا البرنامج يفترض أن العناصر القطرية لا تساوي صفراً.

```
      SUBROUTINE BKSUB (A, B, N, X)
      DIMENSION A (N, N), B(N), X(N)
      X(N) = B(N) / A(N, N)
      DO 10 I = 2, N
      J = N - I + 1
      SUM = 0
      J1 = J + 1
      DO 20 K = J1, N
      SUM = SUM + A(J, K) * X (K)
20    CONTINUE
      X(J) = (B(J) - SUM) / A (J, J)
10    CONTINUE
      RETURN
      END
```

والآن نستعمل البرنامجين في البرنامج الفرعي التالي لحل معادلات عددها N بطريقة الحذف لجاوس. في حالة أن المعادلات ليس لها حل وحيد فإن البرنامج يتوقف مع وضع المتغير IFLAG يساوي صفراً.

```
      SUBROUTINE GEM (A, B, N, X, EPS, IFLAG)
      DIMENSION A(N, N), B(N), X(N)
      IFLAG = 0
      N1 = N - 1
      DO 100 k = 1, N1
      CALL PIVOT (A, B, N, K, L)
      IF (ABS (A(K, K)). LT. EPS) RETURN
      K1 = K + 1
      DO 100 I = K1, N
      T = - A (I, k) / A (k, k)
      DO 20 J = K1, N
20    A (I, J) = A (I, J) + T * A (K, J)
      B(I) = B(I) + T * B (k)
100   CONTINUE
      IF (ABS (A(N, N)). LT. EPS) RETURN
      CALL BKSUB (A, B, N, X)
      IFLAG = 1
      RETURN
      END
```

2.2 حساب المحددات Determinants

بالإمكان استعمال طريقة الحذف لجاوس لإيجاد قيمة محددة مصفوفة مربعة (أي تتكون من n صف و n عمود) وذلك على النحو التالي:

1 - تحويل المصفوفة الى مصفوفة مثلثية مع ملاحظة أن إشارة المحددة تتغير كلما استبدلنا صفين.

2 - إيجاد قيمة المحددة من حاصل ضرب العناصر القطرية للمصفوفة المثلثية.

مثال (2.1):

أوجد محددة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

مع استعمال عملية الارتكاز

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & .5 & 2.5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -.5 & 2.5 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2.25 \end{bmatrix}$$

$$= -4\,(2)\,(2.25) = -18$$

والآن نقوم بكتابة البرنامج التالي لحساب DET محددة المصفوفة A ذات الأبعاد N × N


```
      SUBROUTINE DETRM (A, N, DET, EPS)
      DIMENSION A (N, N)
      N1 = N - 1
      SIGN = 1
      DO 60 K = 1, N1
      CALL PIVOTD (A, N, K, M)
      IF (K. NE. M) SIGN = SIGN * (-1)
      IF (ABS (A(K, K)). GT. EPS) GO TO 10
      DET = 0
      RETURN
10    K1 = K + 1
      DO 50 I = K1, N
      T = - A (I, K) / A (K, K)
      DO 40 J = K1, N
      A (I, J) = A(I, J) + T * A (K, J)
40    CONTINUE
50    CONTINUE
60    CONTINUE
      DET = 1
      DO 70 I = 1, N
      DET = DET * A (I, I)
70    CONTINUE
      DET = DET * SIGN
      RETURN
      END
```

لاحظ أن هذا البرنامج الذي يحسب المحددة DET يحتاج إلى برنامج فرعي PIVOTD وهو مشابه للبرنامج الفرعي PIVOT مع الاختلاف الوحيد في عدم وجود المتجه B حيث لا لزوم له في PIVOTD.

3.3 طريقة كرامر Cramer's Rule

في هذه الطريقة، نتحصل على حل المعادلات AX = B من الصيغة:

$$x_k = \frac{\det (C_k)}{\det (A)} \;, \; k = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.1)$$

حيث C_k هي المصفوفة A مع وضع المتجه B في العمود k من هذه

المصفوفة. إلاّ أن هذه الطريقة لا تستعمل عادة في حل المعادلات الخطية خاصة إذا زاد عدد المعادلات عن ثلاث، وذلك لأنها تتطلب حساب n +1 محددة. ولما كانت كل محددة تتطلب تقريباً العمليات نفسها لحل المعادلات بطريقة الحذف، فإن المجهود المبذول في طريقة كرامر يساوي تقريباً n +1 من المرات ذلك في طريقة الحذف لجاوس.

3.4 حل عدة أنظمة من المعادلات ذات مصفوفة معاملات واحدة

أحياناً قد نحتاج لحل عدة أنظمة خطية من المعادلات ذات مصفوفة معاملات واحدة. فمثلاً، قد نحتاج لحل النظامين:

$$AX^{(1)} = B^{(1)}, AX^{(2)} = B^{(2)} \qquad (4.1)$$

حيث:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه بالإمكان كتابة (4.1) كنظام واحد وهو $AX = B$ حيث:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \end{bmatrix} \qquad 4.2$$

بصورة عامة فإن النظام $AX = B$ حيث A هي nxn والمصفوفات B, X هي nxm (أي تحتوي على n صف و m عمود) يمثل nxm معادلة. لاحظ أن $m = 1$ تمثل النظام الواحد الذي سبقت دراسته.

بالإمكان تطبيق طريقة الحذف لجاوس بنفس الخطوات لحالة النظام الواحد $(m = 1)$ وذلك بتحويل (4.2) إلى نظام مثلثي ثم اتباع طريقة التعويض إلى الخلف.

3.5 معكوس المصفوفة (Inverse)

معكوس المصفوفة A المتكونة من n صف و n عمود هو المصفوفة X المتكونة أيضاً من n صف و n عمود بحيث:

$$AX = I \qquad (5.1)$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة المتكونة هي أيضاً من n صف و n عمود وجميع عناصرها أصفار ما عدا العناصر القطرية فهي تساوي الواحد الصحيح، أي أن:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

من هذا التعريف، يمكن حساب المعكوس وذلك بحل المعادلات (5.1) بطريقة الحذف لجاوس ثم استعمال التعويض إلى الخلف. لاحظ أنه عادة ما يرمز للمعكوس بالرمز A^{-1}، وأنه إذا عرفنا A^{-1} فبالإمكان حل المعادلات $AX = B$ من:

$$X = A^{-1} B \qquad (5.2)$$

من مزايا هذه الطريقة (أي إيجاد المعكوس ثم الضرب في B) أنه لو غيّرنا في

المصفوفة B بحيث أصبحت C فإن الحل يبقى سهلاً أي لحل AX = C نوجد:

$$X = A^{-1} C$$

تمارين (1)

1 ـ بيِّن أن المتجه:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

يعتبر حلاً لنظام المعادلات:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

واستعمل طريقة الحذف لجاوس لحل هذه المعادلات. استعمل 5 خانات في الحسابات وقارن الحل الذي تتحصل عليه بالحل الصحيح.

2 ـ أكتب البرنامج الرئيسي اللازم لحل المعادلات في تمرين (1) مستعملاً البرنامج الفرعي GEM.

3 ـ تتبع البرنامج الفرعي GEM واحسب عدد العمليات الحسابية اللازمة لتنفيذ هذا البرنامج إذا كانت N=10. عمم النتيجة لأي N.

4 ـ **(طريقة جاوس ـ جوردان) تستعمل هذه الطريقة لحل النظام AX = B كما يلي: تستعمل المعادلة k للتخلص من x_k من جميع المعادلات الأخرى**

(وليس من المعادلات k+1 إلى n كما في طريقة الحذف لجاوس) لنحصل على النظام:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \\ 0 & \dots & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \dots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

وبهذا نستغني عن عملية التعويض إلى الخلف في **طريقة جاوس.**

«أ» استعمل طريقة جوردان لحل نظام المعادلات **في تمرين «1».**

«ب» أكتب برنامجاً فرعياً لهذه الطريقة لحل **المعادلات AX = B.**

«حـ» أكتب برنامجاً فرعياً لهذه الطريقة **لحساب معكوس مصفوفة A.**

5 ـ حل المعادلات في تمرين «1» بطريقة كرامر. **أحسب عدد العمليات** الحسابية اللازمة لهذا الحل وقارنها بطريقة الحذف لجاوس.

6 ـ أكتب البرنامج الفرعي لحل المعادلات AX = B **بطريقة كرامر مستعملاً** البرنامج الفرعي DETRM.

7 ـ أحسب عدد العمليات الحسابية اللازمة لحل المعادلات **AX = B حيث** B, X متجهان من N عنصر بطريقة كرامر. **قارن العدد بتمرين (3).**

8 ـ أكتب برنامجاً فرعياً لحل نظام المعادلات **AX = B حيث A مصفوفة** مربعة من n صف وعمود، وX مصفوفة **تتكون من n صف وm عمود وB** **مصفوفة تتكوّن من n صف وm عمود، وذلك بطريقة الحذف لجاوس.**

9 ـ **استعمل البرنامج الفرعي في تمرين (8) في كتابة برنامج فرعي لإيجاد** معكوس مصفوفة مربعة.

10 ـ أحسب معكوس المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

أ ـ بطريقة الحذف لجاوس.

ب ـ بطريقة جاوس ـ جوردان (انظر تمرين 4).

11 ـ أكتب برنامجاً رئيسياً لحساب المتجهات $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(10)}$ من العلاقة:

$$AX^{(k+1)} = X^{(k)}$$

والمتجه الابتدائي:

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وحيث A المصفوفة في تمرين «10»،

(أ) مستعملاً البرنامج الفرعي GEM.

(ب) مستعملاً البرنامج الفرعي INVERS لإيجاد معكوس مصفوفة.

(حـ) أي الطريقتين أفضل؟

12 ـ إثبت العلاقة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t_{21} & 1 & 0 \\ -t_{31} & -t_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ماذا تستنتج من هذه العلاقة؟

13 ـ لاحظ أن البرنامج الفرعي BKSUB **يستعمل لحل المعادلات UX = B** حيث U مصفوفة مثلثية علوية **(أي أن جميع عناصرها التي تحت القطر** أصفار). بطريقة مشابهة، أكتب **البرنامج الفرعي المناظر لحل المعادلات** LX = B حيث L مصفوفة مثلثية سفلية **(أي أن جميع عناصرها التي** فوق القطر أصفار).

14 ـ أكتب برنامجاً فرعياً لحل المعادلات **AX = B حيث A = LU** والمصفوفتان L, U مثلثيتان **الأولى علوية والثانية سفلية (انظر تمرين** 13). استعمل البرنامجين الفرعيين في تمرين (13).

15 ـ أكتب برنامجين فرعيين. الأول **لإيجاد معكوس مصفوفة مثلثية سفلية L،** والثاني لإيجاد **معكوس مصفوفة مثلثية علوية U، واستعمل هذين** البرنامجين في إيجاد **معكوس مصفوفة A حيث A = LU (لاحظ أن:** $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$).

الفصل الرابع

الاستكمال
interpolation

4.1 مقدمة

في حياتنا اليومية، نستخدم «الاستكمال» بالبداهة دون أن نعرف ما هو. فإذا كانت درجة الحرارة عند الساعة الثانية 27° وكانت عند الساعة الثالثة 29° فماذا نتوقع أن تكون درجة الحرارة عند الساعة الثانية والنصف؟ طبعاً الجواب 28°. وذلك لأن درجة الحرارة تزداد كما يبدو بمعدل درجتين في الساعة وبالتالي تزداد درجة واحدة في نصف ساعة. ولكن ماذا عن درجة الحرارة عند الساعة الثانية وعشرين دقيقة مثلاً؟ ذلك يحتاج إلى شيء من الحسابات وهذا هو موضوع هذا الفصل.

4.2 الاستكمال الخطي (Linear Interpolation)

تسمى الدالة:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (2.1)$$

بدالة متعددة الحدود Polynomial (وتعرف أحياناً بالإسم كثيرة الحدود وأحياناً بالحدودية) وتسمى n هنا بدرجة هذه الدالة. في حالة n = 1 تمثل p(x) هندسياً خطاً مستقيماً. وكما هو معلوم، فإنه يكفي لتحديد خط مستقيم نقطتان

يمرّ بهما، ويسمى في هذه الحالة بخط الاستكمال حيث يمكن استعماله لتقدير (استكمال) نقطة ثالثة.

مثال (2.1):
أوجد خط الاستكمال المار بالنقطتين
(1,0) و (2,.301).

في هذه الحالة نفترض:

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

إذن:

$$p(1) = a_0 + a_1 = 0$$

$$p(2) = a_0 + 2a_1 = 0.301$$

وهما معادلتان خطيتان في مجهولين اثنين هما المعاملان a_1، a_0 وحلهما هو:

$$a_1 = .301 \qquad a_0 = -.301$$

وبالتالي فإن:

$$p(x) = .301\,(x - 1)$$

ملاحظة:

نلاحظ في المثال السابق أن:

$$\ell og\,(1) = 0$$

$$\ell og\,(2) \simeq .301$$

وبالتالي فإن $p(x)$ التي تحصلنا عليها هي تقريب للدالة $\ell og(x)$ في الفترة (1,2). فمثلاً: يمكننا تقريب $\ell og(1.5)$ من $p(1.5)$ كالآتي:

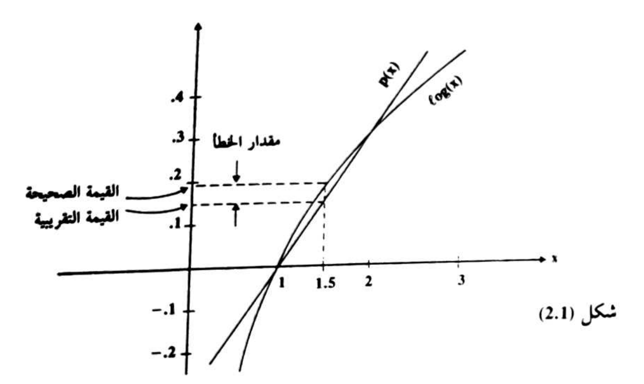
$$\ell og\,(1.5) \simeq .301\,(1.5-1)$$

$$= .1505$$

والقيمة الصحيحة هي:

$$\ell og(1.5) = .1761$$

ويمكن توضيح ذلك بالرسم كما في الشكل (2.1).



شكل (2.1)

بصورة عامة فإن إيجاد خط الاستكمال:

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

المار بالنقطتين: (x_1, y_1) ، (x_0, y_0)

يتطلب حل النظام:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

2.3 الاستكمال التربيعي (Quadratic Interpolation)

وهو عملية إيجاد متعددة الحدود من الدرجة الثانية (قطع مكافىء):

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

المارة بالنقط الثلاث:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

ويجب أن تحقق ما يلي:

$$p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0$$

$$p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1$$

$$p(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2$$

أو بصورة أخرى:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

مثال (3.1):

أوجد متعددة الحدود التي تمرّ بالنقط:

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 1$$

نظراً لوجود ثلاث نقط، فإن درجة متعددة الحدود هي 2، النظام (3.1) يعطي في هذه الحالة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام نحصل على:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = -1$$

أي أن:

$$p(x) = 1 + 2x - x^2$$

لاحظ أن هذه الدالة تحقق فعلاً النقط الثلاث المعطيات.

4.4 الاستكمال بمتعددة الحدود من الدرجة n

متعددة الحدود (2.1) المارة بالنقط:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

يجب أن تحقق ما يلي:

$$p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0$$

$$p(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1$$

$$p(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n$$

وهي تمثل n + 1 معادلة خطية، ويمكن كتابتها على الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

وتسمى مصفوفة هذا النظام بمصفوفة فاندرموند **Vandermond** ونرمز لها بالرمز V. لاحظ أن:

$$V_{i1} = 1 \; (i = 1, 2, \ldots, n + 1)$$

$$V_{ij} = x_{i-1}^{j-1} \; (j = 2, 3, \ldots, n + 1) \qquad (4.2)$$

$$V_{ij+1} = x_{i-1} V_{ij}$$

مثال (4.1):
أكتب مصفوفة فاندرموند إذا كانت

$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

مثال (4.2):
برنامج فرعي لإيجاد معاملات متعددة الحدود بحل النظام (4.1).
المعطيات في هذا البرنامج هي النقط (X, Y) وعددها M والإخراج هو المعاملات C وعددها أيضاً M (أي أن الدرجة هي M-1). نستعمل في هذا البرنامج حل المعادلات (4.1) بواسطة البرنامج الفرعي GEM الذي كتبناه في الفصل السابق.

```
      SUBROUTINE INTRP (X, Y, M, C, EPS, IFLAG, V)
      DIMENSION X(M), Y(M), C(M), V(M, M)
      DO 10 I = 1, M
10    V(I, 1) = 1
      N = M - 1
      DO 20 I = 1, M
      DO 20 J = 1, N
20    V(I, J + 1) = X(I) * V (I, J)
      CALL GEM (V, Y, M, C. EPS, IFLAG)
      RETURN
      END
```

4.5 مؤثرات الفروق المنتهية Finite Difference Operators

إذا كانت لدينا فئة من الأعداد المرتبة $\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ أو كانت لدينا دالة $f(x)$ وعدد ثابت h يسمى عادة الزيادة increment، فإننا نعرّف مؤثر الفروق المتقدمة Δ من:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_i + h) - f(x_i) \qquad (5.1)$$

ونعرف مؤثر الفروق المتأخرة ∇ من:

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_i - h) \qquad (5.2)$$

ونعرف مؤثر الفروق المركزية δ من:

$$\delta y_i = y_{i+½} - y_{i-½} = f(x_i + \frac{h}{2}) - f(x_i - \frac{h}{2}) \qquad (5.3)$$

ونعرف مؤثر الإزاحة E من:

$$Ey_i = y_{i+1} = f(x_i + h) \qquad (5.4)$$

وبالتالي فإن:

$$\Delta y_i = Ey_i - y_i$$

$$\Delta y_i = (E - I)\, y_i \qquad (5.5)$$

حيث I هو مؤثر الوحدة، أي أن:

$$Iy_i = y_i \qquad (5.6)$$

من (5.5) نحصل على العلاقة:

$$\Delta = E - I$$

$$E = \Delta + I \qquad (5.7)$$

الفروق المذكورة أعلاه تعتبر من المرتبة الأولى، ويمكن تعريف مؤثر الفروق المتقدمة من المرتبة الثانية بأنه:

$$\Delta^2 y_i = \Delta\,(\Delta y_i) \qquad (5.8)$$

أي أن :

$$\Delta^2 y_i = \Delta\,(y_{i+1} - y_i)$$

$$= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \qquad (5.9)$$

وبصورة أعم فإن : $\Delta^n y_i = \Delta\,(\Delta^{n-1} y_i)$

هو مؤثر الفروق المتقدمة من المرتبة n . وبالمثل نعرف :

$$E^n y_i = E\,(E^{n-1} y_i) \qquad (5.10)$$

وبالتالي فإن :

$$E^3 y_i = E\,E\,(E\,y_i)$$

$$= E(E\,y_{i+1}) = E y_{i+2}.$$

$$= y_{i+3}$$

وبصورة عامة :

$$E^n y_i = y_{i+n} \qquad (5.11)$$

مثال (5.1) :

بيِّن أن :

$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \qquad (5.12)$$

$$y_3 = E^3 y_0$$

من العلاقة (5.11) :

$$E^3 y_0 = (I + \Delta)^3 y_0$$

ومن (5.7) :

$$= I^3 y_0 + 3I^2 \Delta y_0 + 3I\Delta y_0 + \Delta^3 y_0$$

يتحقق المطلوب.

نلاحظ في هذا المثال أن مبرهنة ذات الحدين بالإمكان **تطبيقها على مؤثرات** الفروق المنتهية، أي أن :

$$(I + \Delta)^n = I + c_1^n \Delta + c_2^n \Delta^2 + \dots + c_n^n \Delta^n \qquad (5.13)$$

حيث c_k^n هي معاملات ذات الحدين، أي :

$$c_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (5.14)$$

وبالتالي فإن :

$$y_n = E^n y_0$$

$$= (I + \Delta)^n y_0$$

$$= I y_0 + c_1^n \Delta y_0 + c_2^n \Delta^2 y_0 + \dots + c_n^n \Delta^n y_0 \qquad (5.15)$$

$$= y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^n y_0$$

وبالمثل فإن :

$$\Delta^n y_0 = (E - I)^n y_0$$

$$= E^n y_0 - c_1^n E^{n-1} y_0 + c_2^n E^{n-2} y_0 - \dots \pm y_0$$

$$= y_n - c_1^n y_{n-1} + c_2^n y_{n-2} + \dots - \dots \pm y_0 \qquad (5.16)$$

4.6 طريقة نيوتن للاستكمال بالفروق المتقدمة

إذا كانت الاحداثيات x_i على أبعاد متساوية بحيث:

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad (6.1)$$

فإن متعددة الحدود:

$$p(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \qquad (6.2)$$

تحقق ما يلي:

$$p(x_0) = y_0$$

$$p(x_1) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_1 - x_0) = y_0 + \Delta y_0 = y_1$$

$$p(x_2) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_2 - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

$$= (I + \Delta)^2 y_0 = E^2 y_0 = y_2$$

$$p(x_n) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_n - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}(x_n - x_0)(x_n - x_1)$$

$$+ \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})$$

$$= y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)}{n!}\Delta^n y_0 = (I + \Delta)^n y_0 = y_n$$

وبالتالي فإن متعددة الحدود (6.2) تمرّ على النقط:

$$(x_i, y_i)\ i = 0, 1, 2, \dots, n$$

أي أنها تحقق خصائص دالة الاستكمال.

مثال (6.1):
أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثالثة للنقط التالية:

x	0	1	2	3
y	3	3	7	21

بما أن قيم المتغير x على أبعاد متساوية، فبالإمكان تطبيق طريقة نيوتن.
لحساب Δ^i نكوّن الجدول التالي (والذي يسمى عادة بجدول الفروق):

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0	3	0	4	6
1	1	3	4	10	–
2	2	7	14	–	–
3	3	21	–	–	–

إذن:

$$p(x) = y_0 + \Delta y_0 (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= 3 + \frac{4}{2!}\ x(x-1) + \frac{6}{3!}\ x(x-1)(x-2)$$

$$= 3 + 2x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

مثال (6.2):
إذا كان: $\ell og(1) = 0,\ \ell og(2) = .30103,\ \ell og(3) = .47712$

فأوجد قيمة تقريبية للمقدار $\ell og\ (2.5)$

أولاً نكون جدول الفروق:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	0	.30103	–.12494
2	.30103	.17609	
3	.47712		

إذن

$$p(x) = .30103\,(x-1) - \frac{.12494}{2}\,(x-1)\,(x-2)$$

إذن :

$$\ell og\,(2.5) \simeq .30103\,(1.5) - .12494\,(1.5)\,(0.5)/\,2 = .4046925$$

ملاحظة :

لاحظ أن القيمة الصحيحة (من الآلة الحاسبة) هي $\ell og\,(2.5) = .39794$

مثال (6.3) :

برنامج لطريقة نيوتن بالفروق المتقدمة

البرنامج الفرعي التالي NTNFD يستقبل في الإدخال القيم :

$$X(1), X(2), \ldots, X(N)$$
$$Y(1), Y(2), \ldots, Y(N)$$

ويستعمل طريقة نيوتن في الاستكمال لتقدير القيمة YP وهي قيمة Y عند XP . لاحظ استعمال المصفوفة :

$$D(I, J) = \Delta^{J}\, y_{I}$$

حيث :

$$J = 1, 2, \ldots, N-1$$
$$I = 1, 2, \ldots, N-J$$

ومن ذلك فإن :

$$D\,(I, J+1) = D\,(I+1, J) - D\,(I, J)$$

وأيضاً :

$$P(XP) = Y(1) + D(1, 1) * T(1) + D(1, 2) * T(2) + \ldots + D\,(1, N-1) * T(N-1)$$

حيث :

$$T(I) = (XP - X(1))\,(XP - X(2))\ldots(XP - X(I))/\,(I!\,H^{I})$$

لاحظ أيضاً من هذا التعريف أن :

$$T\,(I+1) = T(I) * (XP - X(I+1))/\,((I+1) * H)$$

وبالتالي نستخدم هذه العلاقة في البرنامج في حساب متعددة الحدود.

```
      SUBROUTINE NTNFD (X, Y, N, XP, YP, D)
      DIMENSION X(N), Y(N), D(N, N), T(N)
      N1 = N - 1
      H = X(2) - X(1)
      DO 10 I = 1, N1
10    D (I, 1) = Y (I + 1) - Y (I)
      DO 20 J = 2, N1
      NJ = N - J
      DO20 I = 1, NJ
20    D(I, J) = D(I + 1, J - 1) - D(I, J - 1)
      T(1) = (XP - X(1))/ H
      N2 = N - 2
      DO 30 I = 1, N2
30    T(I + 1) = T(I) * (XP - X(I + 1))/ ((I + 1)*H)
      YP = Y(1)
      DO 40 J = 1, N1
40    YP = YP + D (1, J) * T (J)
      RETURN
      END
```

4.7 طريقة لاجرانج Lagrange's Method

نلاحظ أن طريقة نيوتن باستعمال الفروق المتقدمة غير صالحة للاستعمال عندما تكون x_i على أبعاد مختلفة. في هذه الحالة بالإمكان استعمال طريقة لاجرانج.

نبدأ أولاً بتعريف متعددات الحدود التالية :

$$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

(7.1)

$$\ell_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

والمطلوب الآن إيجاد المعاملات c_i بحيث تمر متعددة الحدود:

$$p(x) = c_0\,\ell_0(x) + c_1\,\ell_1(x) + \dots + c_n\,\ell_n(x)$$

على النقط:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

أي أن:

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n$$

ولكن نلاحظ أولاً أن:

$$\ell_0(x_0) = 1, \ell_0(x_1) = 0, \dots, \ell_0(x_n) = 0$$

$$\ell_1(x_0) = 0, \ell_1(x_1) = 1, \dots, \ell_1(x_n) = 0$$

$$\ell_n(x_0) = 0, \ell_n(x_1) = 0, \dots, \ell_n(x_n) = 1$$

وبالتالي فإن:

$$c_i = y_i \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

أي أن متعددة الحدود التي تستكمل النقط (x_i, y_i) هي:

$$p(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\,\ell_1(x) + \dots + y_n\,\ell_n(x) \qquad (7.2)$$

مثال (7.1):

استعمل طريقة لاجرانج لايجاد متعددة الحدود لاستكمال النقط التالية:

x	0	1	3	4
y	−9	−8	18	55

أولاً نوجد $\ell_3(x), \ell_2(x), \ell_1(x), \ell_0(x)$ كما يلي:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = \frac{-1}{12}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{1}{6}(x)(x-3)(x-4)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = -\frac{1}{6}\,x(x-1)(x-4)$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = \frac{1}{12}\,x(x-1)(x-3)$$

وبالتالي فإن:

$$p(x) = y_0\,\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + y_2\ell_2(x) + y_3\ell_3(x)$$

$$= \frac{3}{4}(x-1)(x-3)(x-4) - \frac{4}{3}\,x(x-3)(x-4)$$

$$- 3x(x-1)(x-4) + \frac{55}{12}\,x(x-1)(x-3)$$

ملاحظة:

لكي يتأكد الطالب من صحة $p(x)$ عليه أن يعوض قيم x_i ليحصل على y_i. لاحظ أيضاً أنه ليس من المطلوب تبسيط $p(x)$ إلى الشكل العادي لمتعددة الحدود.

مثال (7.2):

برنامج لحساب الدوال $\ell_i(x)$

من المهم أن نلاحظ أن $\ell_i(x)$ لا تعتمد على قيم y_i وبالتالي فلو غيرنا في قيم y_i فإن المجهود الذي نبذله للحصول على $p(x)$ جديدة لا يذكر. وعلى ذلك، فإن البرنامج الفرعي الذي نكتبه لطريقة لاجرانج يحسب $\ell_i(x)$ عند $xp = x$ (أي نقطة محددة معلومة) بحيث يتم حساب $p(x)$ في برنامج فرعي آخر (أو برنامج رئيسي). إذن فالمعطيات في برنامجنا الفرعي هي القيم X(1), X(2), ..., X(M) فقط بالإضافة الى النقطة المطلوب الاستكمال عندها وهي XP.

```
      SUBROUTINE LGRNG (X, M, XP, AL)
      DIMENSION X(M), AL (M)
      DO 10 I = 1, M
      UP = 1
      DN = 1
      DO 20 J = 1, M
      IF (J. EQ. I) GO TO 20
      UP = UP * (XP - X(J))
      DN = DN * (X(I) - X(J))
20    CONTINUE
      AL (I) = UP/DN
10    CONTINUE
      RETURN
      END
```

مثال (7.3):

البيانات التالية تمثل قياسات للمتغيرات الثلاثة: p, v, u التي تعتمد على t كما هو مبين بالجدول، والمطلوب كتابة برنامج رئيسي لتقدير هذه المتغيرات عند t=2.

t	1	3	4	5	7
P	20	23	18	16	18
u	5	8	10	14	11
v	45	47	50	48	47

هذا المثال يوضح أهمية طريقة لاجرانج في مثل هذه الحالات التي تتطلب استكمال عدة متغيرات تعتمد على متغير واحد. في هذا البرنامج يتم حساب AL(I)، حيث I من 1 إلى 5، مرة واحدة، ويستعمل في حساب الاستكمال لجميع المتغيرات.

```
      DIMENSION T(5), P(5), U(5), V(5), AL(5)
      DATA T/1., 3., 4., 5., 7./, P/ 20., 23., 18., 16., 13./
      DATA U/ 5., 8., 10., 14., 11./, V/ 45., 47., 50., 48., 47./
      TP = 2.
      CALL LGRNG (T, 5, TP, AL)
      PP = 0
      PU = 0
      PV = 0
      DO 10 I = 1, 5
      PP = PP + AL (I) * P(I)
      PU = PU + AL (I) * U (I)
      PV = PV + AL (I) * V(I)
10    CONTINUE
      WRITE (*; 20) TP, PP, PU, PV
20    FORMAT ('  T = ', F5.1, '  P=', F10.5, '  U = ', F10.5,
     * ' V = ', F10.5)
      STOP
      END
```

4.8 تقدير الخطأ في الاستكمال بمتعددة الحدود

نقدم هنا بدون برهان الصيغة لتقدير الخطأ في الاستكمال بمتعددة الحدود، علماً بأن هذا البرهان موجود في أغلب كتب التحليل العددي (انظر مثلاً كتاب المؤلفين Barden-Faires-Reynolds).

مبرهنة:

إذا كانت القيم $x_0, x_1, \dots, x_n$ غير متساوية وتقع داخل الفترة [a, b]، وكانت الدالة f(x) قابلة للتفاضل n + 1 مرة بحيث تكون $f^{(n+1)}(x)$ دالة متصلة في الفترة [a, b]، فإنه توجد قيمة ما ξ لكل x بحيث تقع ξ داخل [a, b] وبحيث:

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(\,(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)) \qquad (8.1)$$

حيث p(x) هي متعددة الحدود التي تستكمل النقط:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))..$$

مثال (8.1):
أوجد الحد الأعلى للخطأ في استكمال sin (1.1) من sin(1) و sin(1.2) بمتعددة الحدود من الدرجة الأولى.

في هذه الحالة f(x) = sin(x)، إذن:

$$f'(x) = \cos(x),\ f''(x) = -\sin(x)$$

بتطبيق (8.1) حيث n = 1 نحصل على:

$$|p(x) - f(x)| = \frac{f''(\xi)}{2}(x - 1)(x - 1.2)$$

أي أن:

$$|p(1.1) - f(1.1)| \leq \frac{1}{2}\,(0.1)(0.1) = 0.005$$

إذن فإن الخطأ لن يتجاوز في هذه الحالة 0.005.

تمارين (1)

1 - إذا كانت درجة الحرارة عند الساعة 2:00 ظهراً 28° وكانت عند الساعة 3:00 ظهراً 30° فاستعمل الاستكمال الخطي لتقدير درجة الحرارة عند الساعة 2:30 وعند الساعة 2:20.

2 - استعمل الاستكمال الخطي لتقدير sin(1.55) وكذلك sin(1.53) علماً بأن sin(1.6) = 0.99957, sin (1.5) = 0.9975.

3 - استعمل الاستكمال التربيعي لتقدير ℓog(1.2) إذا كان ℓog(2) = .3010 و ℓog(1.5) = .17609 و ℓog(1) = 0.

«أ» باستعمال مصفوفة فاندرموند.

«ب» بطريقة نيوتن للفروق المتقدمة.

«حـ» بطريقة لاجرانج.

4 - اكتب البرنامج الفرعي SUBROUTINE LININT (X, Y, XP, YP) الذي يستكمل القيمة YP عند XP بمعلومية النقطتين ((X(1), Y(1)) و (X(2), Y(2)). استعمل هذا البرنامج لاستكمال exp (0.5) من القيمتين exp (1) = 2.7183, exp (0) = 1.

5 - استعمل البرنامج الفرعي INTRP لاستكمال exp (0.5) من النقط $(x_i, \exp(x_i))$ حيث $x_i = 0, .2, .4, .6, .8$.

6 - ما هي العلاقة بين الاستكمال الخطي وطريقة القاطع (أو الوضع الخاطىء)؟ وضّح إجابتك بحل المعادلة $f(x) = e^x - 2$ ابتداءً من x = 0 و x = 1 وحساب دورتين.

7 - اثبت أن:

«أ» $\nabla\Delta = \delta^2$.

«ب» $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$.

«حـ» $E^{-1} = I - \nabla$

8 - **من العلاقة «حـ» في تمرين -7-، وباستعمال مبرهنة ذات الحدين، استنتج صيغة نيوتن للفروق المتأخرة:**

$$p(x) = y_n + \frac{\nabla y_n}{h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 y_n}{2!\, h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1})$$

$$+ \dots + \frac{\nabla^n y_n}{n!\, h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

حيث x_i على أبعاد متساوية بمسافة h.

9 - **إذا كانت متعددة الحدود من الدرجة** n:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

تحقق شروط الاستكمال $p(x_i) = y_i$ لجميع (x_i, y_i) من $i = 0$ إلى $i = n$.

«أ» استنتج النظام المثلثي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & d_{32} & d_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

حيث:

$$d_{i1} = 1$$

$$d_{ij+1} = (x_{i-1} - x_{j-1})\, d_{ij}$$

لجميع قيم:

$j = 1, 2, \dots, n - 1,\ i = 1, 2, \dots, n$.

«ب» طبق هـذه الطريقـة (وتسمى طريقـة نيوتن للفـروق المقسومـة) في إيجاد متعددة الحدود من الدرجة الثالثة للنقط:

$(0,0), (1,1), (2,8), (3,27)$

«حـ» بيّن أنه إذا كانت x_i على أبعاد متساويـة **فإن $p(x)$ تؤول إلى صيغة** نيوتن للفروق المتقدمة.

«د» أكتب برنامجاً فرعياً لإيجاد $a_0, a_1, \dots, a_n$ **بحل النظام المثلثي في** «أ».

10 - **أوجد قيمة تقريبية للجذر التربيعي والتكعيبي** $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}$ **وذلك** باستكمال الدالة $f(x) = 3^x$ للنقاط $x = -1, 0, 1, 2$.

11 - اكتب البرنامج الفرعي FUNCTION YNF (X, Y, N, XP) **الذي** يستعمل القيم X(I), Y(I)، حيث I من 1 إلى N، **ويحسب قيمة الدالة** YNF عند النقطة XP بطريقة نيوتن بالفروق المتقدمة، **واستعمل هذا** البرنامج الفرعي لحساب tan(x) للقيم x = .2, .4, .6 **بمعلومية** tan(x) عند القيم x = 0.1, .3, .5, .7.

12 - قم بالتعديلات اللازمة في البرنامج الفرعي LGRNG **بحيث يتم** استكمال قيمة Y عند نقطة XP في البرنامج. **ثم استعمل هذا البرنامج** المعدل في برنامج رئيسي لاستكمال الدالة $f(x) = 2^x$ **عند النقطة 0.5** بمعلومية النقط $x = -1, 0, 1, 2$.

13 - **إذا كان عدد سكان بلد ما في الخمس سنوات الماضية متوفراً لديك، فاستعمل طريقة نيوتن في كتابة برنامج فرعي للتنبؤ بعدد السكان في هذه السنة.**

14 - **أوجد الحد الأقصى للخطأ في استكمال** cos(0.55) **من «أ»** cos(0.5) cos(0.6) **وثم من «ب»** cos(0.5)، cos(0.6)، cos(0.7). **حقق إجابتك في الحالتين.**

«جـ» اكتب برنامجاً فرعياً لتقدير عدد السكان في سنة من السنوات (يتم إدخالها) بمعلومية عدد السكان في السنوات الثلاث الماضية (أيضاً يتم إدخالها) وذلك باستعمال الاستكمال التربيعي.

نموذج اختبار - 2 -

الزمن: (1:30) (ساعة ونصف)

س (1) : «أ» احسب دورة واحدة بطريقة جاوس - سيدل لحل المعادلات التالية:

$$3x + y + z - 1 = 0$$
$$x - 2y - 1 = 0$$
$$2y + 3x - 2 = 0$$

افترض القيم الابتدائية $x = 0, y = 0, z = 0$

«ب» هل يتحقق التقارب في «أ» عندما يزداد عدد الدورات؟ لماذا؟

س (2) : «أ» حل المعادلات التالية بطريقة الحذف لجاوس:

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2$$

«ب» اكتب برنامجاً فرعياً SUBROUTINE FDSUB(A,B,N,X) الذي يوجد المتجه X بحل النظام $AX = B$ حيث A مصفوفة مثلثية سفلية (أي أن جميع عناصرها التي فوق القطر أصفار).

س (3) : «أ» إذا كان عدد الطلبة في سنة 1984 هو 17,000 وفي سنة 1987 هو 19,400 فقدر عدد الطلبة في 1988، باستعمال الاستكمال الخطي.

«ب» أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثانية التي تلتقي مع الدالة $f(x) = \sin x$ عند $x = 0$ و، $x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$.

الفصل الخامس

التكامل العددي
Numerical Integration

5.1 مقدمة

من المواضيع الهامة في الطرق العددية إيجاد قيمة تقريبية لتكامل دالة يصعب تكاملها بالطرق الرياضية المعروفة في مادة التفاضل والتكامل «Calculus».

فمثلاً التكامل:

$$\int_0^1 \sin(x^2)\, dx$$

لا تجدي معه الطرق الرياضية المعروفة ونضطر لإيجاد قيمة تقريبية له بالطرق العددية، ولكن بالإمكان جعل هذا التقريب قريباً من الحل الصحيح قرباً كافياً للأغراض العملية.

5.2 طريقة شبه المنحرف Trapezoidal Rule

لتقريب التكامل:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \qquad (2.1)$$

تعتمد طريقة شبه المنحرف على تقريب f(x) بواسطة p(x) حيث p(x) هي كثيرة الحدود من الدرجة الأولى:

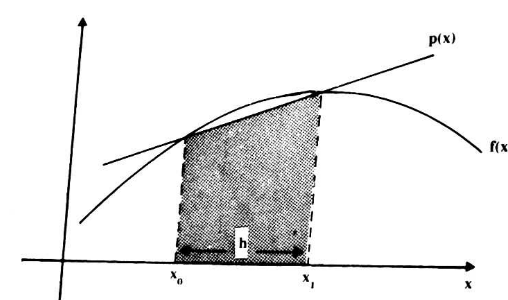
$$p(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) \qquad (2.2)$$

أي أن $p(x)$ تستكمل النقطتين $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ بخط الاستكمال.

إذن:

$$I \simeq \int_{x_0}^{x_1} p(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] \qquad (2.3)$$

أي أن التكامل (2.1) قد تم تقريبه بمساحة شبه المنحرف الواقع تحت المنحنى $f(x)$ وبين المستقيمين $x = x_0$, $x = x_1$ كما في الشكل 2.1.



شكل (2.1) طريقة شبه المنحرف

لاحظ أن في حالة التكامل من x_0 إلى x_2 بحيث x_1 هي نقطة المنتصف بينهما، أي:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$$

فإن:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

$$\simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$= h\left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2)\right]$$

وبصورة عامة، فبالإمكان التكامل من x_0 إلى x_n وذلك بتقسيم الفترة $[x_0, x_n]$ إلى فترات صغيرة طول كل منها h وعددها n بحيث:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} \qquad (2.4)$$

و:

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad (2.5)$$

و:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \qquad (2.6)$$

وباستعمال تقريب شبه المنحرف نحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right] \qquad (2.7)$$

مثال (2.1): قرب التكامل:

$$I = \int_2^3 \frac{dx}{x}$$

مستخدماً طريقة شبه المنحرف: «أ» باستعمال فترة واحدة

«ب» باستعمال فترتين.

«أ» في حالة استعمال فترة واحدة فإن $x_0 = 2$ و $x_1 = 3$ وبالتالي $h = 1$ و:

$$I \simeq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] = \frac{5}{12} = .416667.$$

«ب» عند استعمال فترتين فإن:

$$h = \frac{3-2}{2} = 0.5$$

$$x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 3$$

$$I \simeq h\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\right] = 0.408333$$

ملاحظة :

في المثال السابق، من السهل تكامل الدالة $\frac{1}{x}$ لنحصل على:

$$\int_2^3 \frac{dx}{x} = \ell n(x) \Big]_2^3 = \ell n\,(3/2) = 0.405465$$

إذن في الحالة «أ» الخطأ = 0.01201

وفي الحالة «ب» الخطأ = 0.002868

مما يشير إلى أن الخطأ يتناقص بزيادة عدد الفترات.

مثال (2.2) :

برنامج للتكامل بطريقة شبه المنحرف

في البرنامج الفرعي التالي نحسب القيمة التقريبية AREA للدالة F(X) المعرفة في برنامج فرعي آخر. حدود التكامل هي (A, B) وعدد التقسيمات (أي الفترات) هو N.

```
        SUBROUTINE TRAP (F, A, B, AREA, N)
        H = (B − A)/ N
        AREA = (F(A) + F(B))/ 2.
        IF (N.EQ.1) GO TO 20
        N1 = N − 1
10      DO 10 I = 1, N1
20      AREA = AREA + F(A + I * H)
        AREA = AREA * H
        RETURN
        END
```

5.3 طريقة سمبسن (Simpson's Method)

بدلاً من تقريب f(x) بواسطة خط الاستكمال p(x) نستعمل في طريقة سمبسن الاستكمال التربيعي:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) \quad (3.1)$$

ولتبسيط التكامل نفترض أن: $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$

لنحصل على:

$$p(x) = f(-1) + \left[\Delta f(-1) + \frac{\Delta^2 f(-1)}{2}\right] x + \frac{\Delta^2 f(-1)}{2} x^2 \quad (3.2)$$

إذن:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 2f(-1) + \frac{\Delta^2 f(-1)}{3}$$

$$= 2f(-1) + \frac{1}{3}\left[f(-1) - 2\,f(0) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\,f(-1) + \frac{4}{3}\,f(0) + \frac{1}{3}\,f(1)$$

وباعتبار هذه القيمة كتقريب للقيمة الصحيحة I نحصل على قاعدة سمبسن:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \frac{1}{3}\left[f(-1) + 4\,f(0) + f(1)\right] \quad (3.4)$$

ولكن هذه الحالة خاصة لحدود التكامل (1 ,1−). لتعميمها على الفترة (a, b) نقوم بالتعويض التالي:

$$t = 1 + \frac{2(x-b)}{b-a} \Leftrightarrow x = b + \frac{(t-1)(b-a)}{2} \quad (3.5)$$

نلاحظ هنا أن t = 1 عندما x = b و t = − 1 عندما x = a، وأن:

$$dt = \frac{2}{b-a}\,dx \quad (3.6)$$

أي أن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f[x\,(t)]\,dt$$

$$= h\int_{-1}^{1} g\,(t)\,dt \quad (3.7)$$

حيث:

$$g(t) = f[x\,(t)]\,dt \quad (3.8)$$

و: $h = \frac{b-a}{2}$

وذلك نظراً لتقسيم (a, b) إلى فترتين (a, x_1) و (x_1, b) باعتبار
$x_2 = b, x_0 = a$

من (3.4), (3.7) نحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

أما إذا قسمنا فترة التكامل إلى n فترة صغيرة طول كل منها h (لاحظ ضرورة أن يكون n عدداً زوجياً)، فنحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$\simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] + \ldots + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

وبشيء من التنظيم، نحصل على القاعدة العامة لطريقة سمبسن:

(3.9)
$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

أو بصورة أخرى أكثر اقتصاداً في العمليات الحسابية:

(3.10)
$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4S_1 + 2S_2\right]$$

حيث:

$$S_1 = f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})$$

و:

$$S_2 = f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2})$$

مثال (3.1):

استعمل طريقة سمبسن لتقريب:

$$I = \int_1^2 e^x\,dx$$

وذلك بتقسيم الفترة (1, 2) إلى 4 فترات.

في هذه الحالة $h = \frac{2-1}{4} = 0.25$ ، $f(x) = e^x$

إذن:

$$I \simeq \frac{(.25)}{3}\left[f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)\right]$$
$$= 4.670875$$

ملاحظة:

في المثال السابق، بالإمكان الحصول على القيمة الصحيحة للتكامل رياضياً وهي:

$$e^2 - e^1 = 4.670777$$

أي أن الخطأ المطلق هو:

$$\text{error} = .000098$$

وهو (كما يبدو) صغير بما فيه الكفاية، مما يشير إلى دقة طريقة سمبسن.

مثال (3.2) :

برنامج فرعي للتكامل بقاعدة سمسن

البرنامج التالي يستعمل الصيغة (3.10) لحساب التكامل التقريبي للدالة F(x) المعرفة من برنامج فرعي منفصل. حدود التكامل هي (A, B) وعدد التقسيمات هو العدد الزوجي N.

```
      FUNCTION SMPSN (F, A, B, N)
      H = (B - A)/ N
      N1 = N - 1
      N2 = N - 2
      S1 = 0
      S2 = 0
      DO 10 I = 1, N1, 2
10    S1 = S1 + F(A + I * H)
      IF (N2. EQ. 0) GO TO 30
      DO 20 I = 2, N2, 2
20    S2 = S2 + F(A + I * H)
30    SMPSN = (H/ 3) * (F(A) + F(B) + 4 * S1 + 2 * S2)
      RETURN
      END
```

5.4 تقدير الخطأ في طريقة شبه المنحرف

باستعمال متسلسلة تايلور:

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i)\, f'(x_i) + \frac{1}{2}\ (x - x_i)^2\, f''(x_i) + \dots$$

نحصل على:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = hf(x_i) + \frac{h^2}{2}\, f'(x_i) + \frac{h^3}{6}\, f''(x_i) + \dots \quad (4.1)$$

أما باستعمال طريقة شبه المنحرف، فنحصل على:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \simeq \frac{h}{2}\ \left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] \quad (4.2)$$

$$= \frac{h}{2}\ \left[f(x_i) + f(x_i) + h\, f'(x_i) + \frac{h^2}{2}\, f''(x_i) + \dots\right]$$

$$= h\, f(x_i) + \frac{h^2}{2}\, f'(x_i) + \frac{h^3}{4}\, f''(x_i) + \dots$$

إذن بالإمكان حساب خطأ القطع في صيغة شبه المنحرف **(Truncation error)** بأخذ الفرق بين القيمة الصحيحة (4.1) والقيمة التقريبية (4.2) هو:

$$e_i \simeq -\ \frac{h^3}{12}\ f''(x_i) \quad (4.3)$$

حيث تم حذف الحدود الأخرى التي تحتوي على h أس 4 فما فوق، وهي حدود صغيرة في قيمتها إذا كانت h أقل من الواحد. يوصف الخطأ (4.3) بالخطأ الموضعي local error، وهو الخطأ الناتج من تقريب التكامل على الفترة (x_i, x_{i+1}). أما الخطأ الكلي global error فهو مجموع الأخطاء الموضعية، أي أن:

$$e \simeq \sum_{i=0}^{n-1}\ \frac{h^3}{12}\ f''(x_i) \quad (4.4)$$

وإذا اعتبرنا وجود ξ بحيث:

$$\frac{1}{n}\ \sum_{i=0}^{n-1}\ f''(x_i) = f''(\xi)$$

فإن:

$$e \simeq c\, h^2 \quad (4.4)$$

حيث:

$$c = \frac{(b - a)}{12}\ f''(\xi) \quad (4.5)$$

وبالتالي فإن طريقة شبه المنحرف تعتبر من المرتبة الثانية لأن الخطأ الكلي يتناسب تقريباً مع مربع h.

مثال (4.1) :

أوجد حداً أعلى لخطأ الصيغة في حساب:

$$\int_1^2 e^x\, dx$$

بطريقة شبه المنحرف:

«أ» باستعمال 10فترات. «ب» باستعمال 20 فترة.

(أ) بما أن $f(x) = e^x$، $f'(x) = e^x$، $f''(x) = e^x$، إذن فإن أعلى قيمة تأخذها $f''(x)$ في فترة التكامل (1، 2) هي e^2. من (4.5) نجد أن:

$$\text{الخطأ} \leq \frac{(2-1)}{12}\left(\frac{1}{10}\right)^2 e^2 = 0.006$$

(ب) إذا كانت $n = 20$، فإن:

$$\text{الخطأ} \leq \frac{(2-1)}{12}\left(\frac{1}{20}\right)^2 e^2 = \frac{.006}{4} = .0015$$

5.5 طريقة الاستكمال لريتشاردسن Richardson Extrapolation Method

بالإمكان الاستفادة من صيغة الخطأ (4.4) للحصول على خطأ أقل (أي من مرتبة أعلى). فإذا اعتبرنا القيمة I هي القيمة الصحيحة (أو الأقرب للصحيحة) للتكامل، واعتبرنا $T(h)$ القيمة التي نحصل عليها من طريقة شبه المنحرف باستعمال فترات طولها h فإن الخطأ الكلي هو:

$$I - T(h) \simeq c\,h^2 \qquad (5.1)$$

حيث c مقدار ثابت، أي لا يعتمد على h، وهو مقدار مجهول القيمة. فإن استعملنا ضعف عدد الفترات، فإن h تتقلص إلى النصف، وبالتالي فإن الخطأ يصبح:

$$I - T\left(\frac{h}{2}\right) \simeq c\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{c}{4}\,h^2 \qquad (5.2)$$

إذا اعتبرنا (5.1) و (5.2) كمعادلتين في مجهولين هما I، c، فإن الحل هو:

$$I \simeq \frac{4}{3}\,T\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\,T(h) \qquad (5.3)$$

تعطي هذه الصيغة تقريباً (5.3) أكثر دقة من $T(h)$ و $T\left(\frac{h}{2}\right)$.

مثال (5.1):

أكتب برنامج فرعي لطريقة الاستكمال لريتشاردسن

في هذا البرنامج نستفيد من SUBROUTINE TRAP مع ملاحظة أن $T(h)$ نحصل عليها باستعمال N فترة، بينما $T\left(\frac{h}{2}\right)$ نحصل عليها باستعمال 2*N فترة.

```
SUBROUTINE REXTM (F, A, B, AREA, N)
CALL TRAP (F, A, B, TH, N)
CALL TRAP (F, A, B, TH2, 2*N)
AREA = (4./3.) * TH2 - (1./3.) * TH
RETURN
END
```

ملاحظة:

مع أن البرنامج المذكور يؤدي العمل المطلوب، إلا أنه لا يراعي الناحية الاقتصادية في الحسابات، إذ إن حساب الدالة F عند النقط x_i يتم مرتين دون تخزين، وهي نقطة ضعف في البرنامج يجب تعديلها بإعادة كتابة البرنامج الفرعي TRAP بحيث يتم حساب الدالة F وتخزين القيم في متجه Y في البرنامج المنادي لهذا البرنامج الفرعي (انظر تمرين 8).

5.6 تقدير الخطأ في طريقة سمبسن

إذا كانت S_i هي القيمة التقريبية للتكامل:

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \qquad (6.1)$$

بطريقة سمبسن، فإن:

$$S_i = \frac{h}{3}\left[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right] \qquad (6.2)$$

وباستعمال متسلسلة تايلور، نحصل على:

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+2}}\Big[f(x_i) + (x-x_i)\,f'(x_i) + \frac{1}{2}(x-x_i)^2 f''(x_i) + \frac{1}{3!}(x-x_i)^3 f'''(x_i) + \frac{1}{4!}(x-x_i)^4 f^{iv}(x_i) + \dots\Big]dx$$

حيث f^{iv} تعني المشتقة الرابعة للدالة f.

بتكامل حدود المتسلسلة، فإن:

$$I_i = 2h\, f(x_i) + \frac{(2h)^2}{2} f'(x_i) + \frac{(2h)^3}{3!} f''(x_i) + \frac{(2h)^4}{4!} f'''(x_i) + \frac{(2h)^5}{5!} f^{iv}(x_i) + \dots$$

في نفس الوقت، نستعمل متسلسلة تايلور للحصول على:

$$S_i = \frac{h}{3} f(x_i) + \frac{4h}{3}\left[f(x_i) + h f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{iv}(x_i) + \dots \right] + \frac{h}{3}\left[f(x_i) + 2h\, f'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(2h)^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{iv}(x_i) + \dots \right]$$

وبالتالي فإن الخطأ في S_i هو:

$$e_i = I_i - S_i$$

$$e_i = \left[\frac{32}{120} - \frac{4}{3(24)} - \frac{16}{3(24)} \right] h^5 f^{iv}(x_i) + \dots \qquad (6.3)$$

أي أن:

$$e_i \simeq c_i\, h^5 \qquad (6.4)$$

حيث:

$$c_i = \frac{-1}{90} f^{iv}(x_i) \qquad (6.5)$$

للحصول على الخطأ الكلي نجمع الأخطاء الموضعية:

$$e = e_0 + e_2 + \dots + e_{n-2}$$

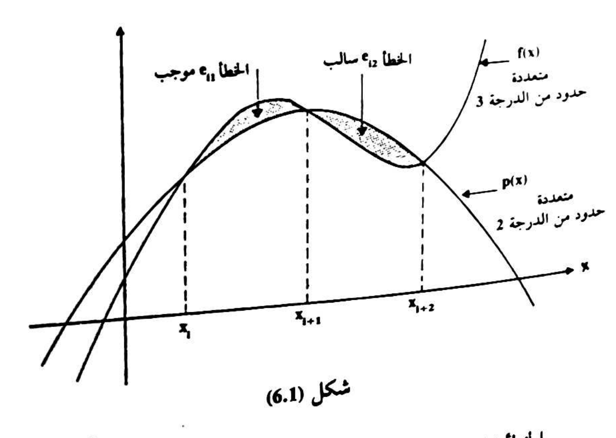
$$e = \frac{n}{2}\left(\frac{-1}{90}\right) f^{iv}(\xi)\, h^5 = -\frac{(b-a)}{180} f^{iv}(\xi)\, h^4 \qquad (6.6)$$

حيث ξ نقطة تكون عندها المشتقة الرابعة مساوية متوسط القيم $f^{IV}(x_i)$ $(i = 0, 2, \dots, n-2)$.

ملاحظات:

«1» الخطأ الموضعي كما هو واضح من (6.3) **يساوي صفراً إذا كانت f(x)** متعددة الحدود من الدرجة الثالثة أو أقل. **وهذا غير متوقع إذ إننا قربنا في** الأساس الدالة f(x) **بمتعددة الحدود من الدرجة الثانية وليس الثالثة،** ويمكن تعليل ذلك كما في الرسم (شكل 6.1).

«2» يتناسب الخطأ الكلي مع h **مرفوعة للأس 4، أي أن المرتبة في طريقة** سمبسن أعلى بدرجتين من **طريقة شبه المنحرف (وليس درجة واحدة كما** هو متوقع).



شكل (6.1)

الخطأ الموضعي في هذه الحالة: (أي المبيَّنة في شكل 6.1)

$$e_i = e_{i1} + e_{i2} = 0$$

تمارين

1 ـ أحسب القيمة التقريبية للتكاملات التالية بطريقة شبه المنحرف مستعملاً «أ» 3 فترات «ب» 6 فترات. أحسب القيمة الصحيحة كلما أمكن ذلك، ومنها أحسب الخطأ في التقريب المحسوب في «أ» و «ب».

i) $\int_0^1 x^2\,dx$ ii) $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$ iii) $\int_1^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

2 ـ أكتب برنامجاً رئيسياً واحداً لحساب التكاملات في تمرين (1) مستعملاً البرنامج الفرعي TRAP.

3 ـ أعد كتابة البرنامج الفرعي TRAP مستبدلاً الدالة F في المتغيرات بالمتجه Y الذي يتم حسابه في البرنامج الرئيسي من $y_i = f(x_i)$ حيث: $i = 1, 2, \ldots, n$.

4 ـ أحسب القيمة التقريبية للتكاملات التالية بطريقة سمسن مستعملاً «أ» 4 فترات «ب» 6 فترات.
أحسب القيمة الصحيحة كلما أمكن ذلك ومنها أحسب الخطأ في التقريب المتحصل عليه في «أ» و «ب».

i) $\int_0^1 x^3\,dx$ ii) $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ iii) $\int_1^4 \ell n(x)\,dx$

5 ـ أكتب برنامجاً رئيسياً لحساب التكاملات في تمرين «4» مستعملاً البرنامج الفرعي SMPSN.

6 ـ أعد كتابة البرنامج الفرعي SMPSN مستبدلاً الدالة F في متغيرات البرنامج بالمتجه Y الذي يتمّ حسابه في البرنامج الرئيسي من العلاقة $y_i = f(x_i)$ حيث $i = 1, 2, \ldots, n$.

7 ـ أوجد الحد الأعلى للخطأ في حساب $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$ بطريقة شبه المنحرف «أ» باستعمال 8 فترات. «ب» باستعمال 12 فترة.
كم عدد الفترات التي نحتاجها حتى لا يزيد الخطأ عن 10^{-5}؟

8 ـ أعد كتابة البرنامج الفرعي REXTM الذي يستعمل طريقة الاستكمال لريتشاردسن مستعملاً المتجه Y بدلاً من الدالة F بحيث يتم حساب جميع قيم Y في البرنامج الرئيسي مرة واحدة.

9 ـ أوجد مرتبة الخطأ الموضعي في التقريب التالي:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] - \frac{h^3}{12} f''(x_i)$$

ثمّ أوجد الصيغة العامة لهذا التقريب في حالة التكامل على الفترة [a, b] وتقسيمها إلى n من الفترات.

10 ـ التقريب التالي:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq 2h\,f(x_i)$$

يسمى بطريقة نقطة المنتصف (Midpoint Method).

«أ» وضح هذه الطريقة بالرسم.
«ب» أوجد مرتبة الخطأ الموضعي.
«جـ» أوجد الصيغة العامة في حالة تقسيم فترة التكامل إلى n فترة.
«د» أكتب برنامجاً فرعياً لحساب تكامل F من A إلى B باستعمال N فترة بهذه الطريقة.

11 ـ بين أن تقريب الدالة f(x) بالمتعددة الحدود من الدرجة الأولى p(x) التي تمر بالنقطتين $(0, f(0))$, $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ يؤدي إلى التقريب:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{4} f(0) + \frac{3}{4} f\left(\frac{2}{3}\right)$$

وأوجد مرتبة هذه الطريقة.

12 ـ لتكن f(x) متعددة الحدود من الدرجة الثالثة و p(x) متعددة الحدود من الدرجة الثانية المطابقة لـ f(x) عند x_i و x_{i+1} و x_{i+2}. علّل أن الخطأ في تكامل f(x) من x_i إلى x_{i+2} بطريقة سمبسن يساوي صفراً بإثبات أن:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - p(x)]\,dx = -\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} [f(x) - p(x)]\,dx$$

الفصل السادس

التفاضل العددي
Numerical Differentiation

6.1 مقدمة

ليس الغرض من التفاضل العددي - كما هو الحال في التكامل العددي - إيجاد قيمة عددية لتفاضل دالة نعجز عن تفاضلها تحليلياً، فمعظم الدوال تكون عادة سهلة التفاضل، ولكن الغرض الأساسي هو الحصول على صيغ للتفاضل يمكن استعمالها فيما بعد لحل ما يسمى بالمعادلات التفاضلية.

6.2 صيغ من المرتبة الأولى للمشتقة الأولى

باستعمال متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ حول النقطة x_i وعند النقطة $x = x_{i+1}$ نحصل على:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + h\,f'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\,f''(\xi_i) \tag{2.1}$$

حيث ξ_i نقطة تقع في الفترة $[x_i, x_{i+1}]$ و h كالعادة هي الزيادة:

$$h = x_{i+1} - x_i$$

من (2.1) نحصل على:

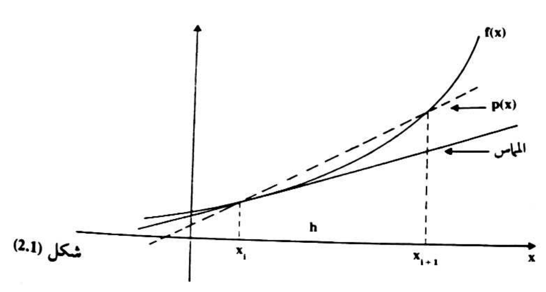
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!}\,f''(\xi) \tag{2.2}$$

وبالتالي إذا كانت h صغيرة، يكون التقريب:

$$f'(x_i) \simeq \frac{\Delta f(x_i)}{h} \qquad (2.3)$$

مقبولاً، وبخطأ يتناسب طردياً مع h، أي ذا مرتبة أولى.

هندسياً، التقريب (2.3)، يقرب ميل المماس للدالة $f(x)$ عند النقطة $(x_i, f(x_i))$ بميل المستقيم الواصل بين النقطتين $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$، كما في الرسم (شكل 2.1).



شكل (2.1)

لاحظ أننا إذا قربنا $f(x)$ بمتعددة الحدود من الدرجة الأولى:

$$p(x) = f(x_i) + \frac{\Delta f(x_i)}{h}(x - x_i)$$

وأخذنا التقريب:

$$f'(x_i) \simeq p'(x_i) = \frac{\Delta f(x_i)}{h}$$

فإننا نحصل على النتيجة نفسها (2.3).

والآن بالإمكان الحصول على صيغة أخرى لتقريب $f'(x)$ وذلك بنشر متسلسلة تايلور عند النقطة x_{i-1} حول النقطة $x = x_i$، أي أن:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_i) \qquad (2.4)$$

حيث ξ_i نقطة مجهولة تقع في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$. من هذه الصيغة نحصل على:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi_i) \qquad (2.5)$$

فإذا أخذنا:

$$f'(x_i) \simeq \frac{\nabla f(x_i)}{h} \qquad (2.6)$$

فإن ذلك يؤدي إلى خطأ مقداره $\frac{h}{2} f''(\xi_i)$.

6.3 صيغ من المرتبة الثانية للمشتقة الأولى:

باستعمال متسلسلة تايلور، نحصل على:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + h f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_i) \qquad (3.1)$$

وأيضاً:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(\phi_i) \qquad (3.2)$$

حيث ξ_i تقع في الفترة $[x_i, x_{i+1}]$ و ϕ_i تقع في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$. بطرح (3.2) من (3.1) نحصل على:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{12} [f'''(\xi_i) + f'''(\phi_i)] \qquad (3.3)$$

إذن بالإمكان الحصول على التقريب:

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \qquad (3.4)$$

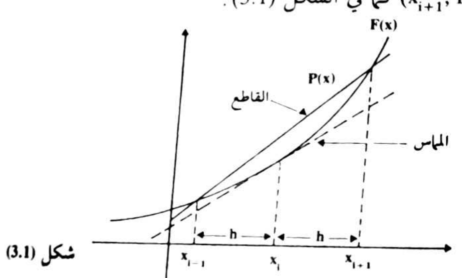
بحيث إذا كانت في الفترة $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

$$|f'''(x)| \le k$$

فإن الخطأ في (3.4) يحقق:

$$|e| \leq \frac{kh^2}{6} \qquad (3.5)$$

يسمى التقريب (3.4) بالتقريب بالفروق المركزية، وكما هو واضح من صيغة الخطأ، أنه تقريب من المرتبة الثانية. من الناحية الهندسية، فإن التقريب (3.4) يمثل تقريب ميل المماس بميل الخط الواصل بين النقطتين: $(x_{i+1}, f(x_{i+1})), (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ كما في الشكل (3.1).



شكل (3.1)

من جهة أخرى، إذا أخذنا متعددة الحدود من الدرجة الثانية المارة بالنقط الثلاث $((x_{i+1}, f(x_{i+1})), (x_i, f(x_i)), (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ وهي:

$$(3.6) \qquad p(x) = f(x_{i-1}) + \frac{\Delta f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1}) + \frac{\Delta^2 f(x_{i-1})}{2h^2}(x - x_i)(x - x_{i-1})$$

وبالتالي فإن:

$$(3.7) \qquad p'(x) = \frac{\Delta f(x_{i-1})}{h} + \frac{\Delta^2 f(x_{i-1})}{2h^2}(2x - x_i - x_{i-1})$$

$$(3.8) \qquad p'(x_i) = \frac{\Delta f(x_{i-1})}{h} + \frac{\Delta^2 f(x_{i-1})}{2h}$$

$$= \frac{1}{2h}[2f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{1}{2h}[f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})]$$

فإذا استعملنا التقريب:

$$f'(x_i) \simeq p'(x_i)$$

فإننا نحصل على الصيغة (3.4) نفسها، وبالتالي يمكن اعتبار هذه الصيغة أنها نتيجة استكمال الدالة $f(x)$ بمتعددة الحدود من الدرجة الثانية $p(x)$ وأخذ $p'(x_i)$ لتقدير $f'(x_i)$.

مثال (2.1):

استعمل «أ» الفروق المتقدمة من المرتبة الأولى.

«ب» الفروق المتأخرة من المرتبة الأولى.

وذلك لتقريب $f'(1.5)$ حيث $f(x) = x^3$ و $h = 0.1$. قارن بين الخطأ في التقريب والحد الأعلى لخطأ الصيغة.

أ)

$$f'(1.5) \simeq \frac{f(1.6) - f(1.5)}{(.1)} = 7.21$$

القيمة الصحيحة للمشتقة الأولى هي:

$$f'(1.5) = 3(1.5)^2 = 6.75$$

إذن الخطأ هو:

$$e = 6.75 - 7.21 = -0.44$$

الحد الأعلى للخطأ يمكن الحصول عليه من:

$$|e| = \left|\frac{h}{2} f''(\xi_i)\right| \leq \frac{1}{2}(6\xi_i) \leq (.05)(6)(1.6)$$

أي أن:

$$|e| \leq 0.48$$

وهذه النتيجة تتفق مع الخطأ المتحصل عليه.

ب)

$$f'(1.5) \simeq \frac{f(1.5) - f(1.4)}{(.1)} = 6.31$$

الخطأ في هذا التقدير هو:

$$e = 6.75 - 6.31 = .44$$

والحد الأعلى نتحصل عليه من:

$$|e| \leq \left| \frac{h}{2} \; f''(\xi_i) \right| \leq (.05)\,(6)\,(1.5) = 0.45$$

وبالتالي فتقديرنا يتفق مع هذه النتيجة.

مثال (2.2):

استعمل الفروق المركزية للحصول على تقريب للتفاضل $f'(1.5)$ حيث $f(x) = x^3$ و $h = 0.1$، قارن بين الخطأ في التقريب والصيغة (3.5).

باستعمال (3.4) نحصل على:

$$f'(1.5) \simeq \frac{f(1.6) - f(1.4)}{0.2} = \frac{(1.6)^3 - (1.4)^3}{0.2} = 6.76$$

ومقارنة بالقيمة الصحيحة $f'(1.5) = 6.75$

فإن مقدار الخطأ هو -0.01. **وباستعمال (3.5) فإن الخطأ لا يزيد عن:**

$$|e| \leq \frac{k(.1)^2}{6}$$

حيث:

$$k = |f'''(x)| = 6$$

أي أن:

$$|e| \leq .01$$

وهو متفق مع الخطأ الذي تحصلنا عليه.

تمارين (1)

1 - أوجد قيماً تقريبية للتفاضل $f'(2)$ حيث $f(x) = x^2$.

أ) باستعمال الفرق المتقدم من المرتبة الأولى.

ب) باستعمال الفرق المتأخر من المرتبة الأولى.

حـ) باستعمال الفرق المركزي من المرتبة الأولى.

في كل الحالات اعتبر $h = 0.2$ وقارن القيمة التقريبية بالقيمة الصحيحة.

2 - استعمل صيغ الحد الأعلى للخطأ في تمرين «1» وقارن بالخطأ الفعلي.

3 - إحصل على صيغ الخطأ في طرق الفرق المتقدم والمركزي باستعمال صيغة الخطأ في متعددة الحدود $p(x)$ لاستكمال $f(x)$.

4 - باستعمال (3.7) بيِّن أن الصيغة:

$$f'(x_i) \simeq \frac{1}{h} \left[\Delta f(x_i) - \frac{1}{2} \; \Delta^2 f(x_i) \right]$$

هي من المرتبة الثانية. استعمل هذه الصيغة لتقدير $f'(1)$ حيث $f(x) = x^3$, $h = .5$ وقارن بالقيمة الصحيحة.

5 - من تمرين «4» بين أن الصيغة:

$$f'(x_i) \simeq \frac{1}{h} \left[2f(x_{i+1}) - \frac{3}{2} \; f(x_i) - \frac{1}{2} \; f(x_{i+2}) \right]$$

هي من المرتبة الثانية. استعمل هذه الصيغة لتقدير $f'(1)$ حيث $f(x) = x^3$, $h = .5$. وقارن بالقيمة الصحيحة.

6 - باستعمال (3.7) اشتق الصيغة ذات المرتبة الثانية:

$$f'(x_i) \simeq \frac{1}{2h} \left[f(x_{i-2}) + 3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) \right]$$

واستعمل هذه الصيغة لتقدير $f'(1)$ كما في تمرين (5).

6.4 صيغ للمشتقة الثانية

باستعمال متسلسلة تايلور فإن:

$$(4.1) \quad f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \frac{h^3}{3!} f'''_i + \frac{h^4}{4!} f^{iv}(\xi_i)$$

حيث: $f_i = f(x_i), f'_i = f'(x_i), f''_i = f''(x_i), \ldots$

وحيث: $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$

أيضاً، بالإمكان الحصول على المتسلسلة:

$$(4.2) \quad f_{i-1} = f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i - \frac{h^3}{3!} f'''_i + \frac{h^4}{4!} f^{iv}(\lambda_i)$$

بإضافة (4.1), (4.2)

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f''_i + \frac{h^4}{4!}\left[f^{iv}(\xi_i) + f^{iv}(\lambda_i)\right]$$

إذن الصيغة:

$$(4.3) \quad f''(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} = \frac{\delta^2 f(x_i)}{h^2}$$

تعطي تقريباً للمشتقة الثانية بخطأ يتناسب مع h^2، أي إذا كانت c مقداراً ثابتاً بحيث:

$$|f^{iv}(x)| \le c$$

فإن الخطأ في (4.3) لا يتعدّى:

$$(4.4) \quad |e_i| \le \frac{c}{12} h^2$$

ومن جهة أخرى، يمكن الحصول على الصيغة (4.3) من المشتقة الثانية لمتعددة الحدود p(x) التي تمر على النقط (x_{i+1}, y_{i+1})، (x_i, y_i)، (x_{i-1}, y_{i-1}) ثم إيجاد $p''(x_i)$ واعتبارها تقريباً للمشتقة $f''(x_i)$.

مثال (4.1):

إذا كانت:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}, f(1) = 1, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{16}$$

فأوجد قيمة تقريبية للمشتقة $f''(1)$.

$$f''(1) \simeq \frac{81/16 - 2(1) + 1/16}{(1/2)^2} = 12.5$$

ملاحظة:

في هذا المثال، تم اختيار قيم f بحيث تحقق:

$$f(x) = x^4$$

وبالتالي فإن:

$$f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2$$

$$f''(1) = 12$$

وعلى ذلك فإن الخطأ في التقريب المتحصل عليه في المثال هو 0.5. وإذا طبقنا صيغة الخطأ (4.4) فإن:

$$f^{iv}(x) = 24$$

$$e = \frac{24}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

وهي القيمة التي تحصلنا عليها للخطأ.

مثال (4.2):

أثبت أن الصيغة:

$$(4.4) \quad f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

ذات خطأ يتناسب مع h.

نستعمل متسلسلة تايلور للتعبير عن $f(x_{i+1})$ و $f(x_{i+2})$ كالآتي:

$$f_{i+2} = f_i + 2hf'_i + \frac{(2h)^2}{2!}f''_i + \frac{(2h)^3}{3!}f'''_i + \ldots$$

$$f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2!}f''_i + \frac{h^3}{3!}f'''_i + \ldots$$

إذن:

$$f_{i+2} - 2f_{i+1} = - f_i + h^2 f''_i + f'''_i h^3 + \ldots$$

أي أن:

$$f''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} - h f'''_i \ldots\ldots$$

وبالتالي فإن الصيغة (4.4) ذات خطأ يتناسب مع h، أي من المرتبة الأولى.

تمارين (2)

1 ـ أوجد قيماً تقريبية لكل من $f'(1)$ و $f'(1.1)$ إذا كانت

$$f(1) = 1, f(1.1) = \frac{10}{11}, f(1.2) = \frac{5}{6}$$

قارن مع الدالة: $f(x) = 1/x$

2 ـ إثبت أن الصيغة المتأخِّرة:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

ذات خطأ يتناسب مع h.

3 ـ **استعمل متسلسلة تايلور لإيجاد صيغة ذات خطأ يتناسب مع h^2 لتقريب $f''(x_i)$ بدلالة $f(x_i)$ و $f(x_{i+1})$ و $f(x_{i+2})$ و $f(x_{i+3})$.**

4 ـ **استعمل متسلسلة تايلور لإيجاد صيغة ذات خطأ يتناسب مع h^2 لتقريب $f''(x_i)$ بدلالة $f(x_i)$ و $f(x_{i-1})$ و $f(x_{i-2})$ و $f(x_{i-3})$.**

نموذج امتحان شامل للجزء الأول

(الزمن: ساعتان)

س (1) : أوجد قيمة تقريبية للجذر الموجب للمعادلة:

$$2x^2 - 3 = 0$$

«أ» بطريقة التنصيف مبتدئاً بالفترة [1,2] وحساب دورتين فقط.

«ب» بطريقة الوضع الخاطىء مبتدئاً بالفترة [1,2] وحساب دورة واحدة.

«حـ» بطريقة نيوتن مع أخذ $x_0 = 2$ وحساب دورة واحدة.

«د» اكتب برنامجاً لحساب 10 دورات بطريقة نيوتن مبتدئاً بالقيمة $x_0 = 2$ لحل المعادلة في الفقرة «أ».

س (2) : «أ» أحسب دورة واحدة لحل المعادلات التالية بطريقة جاوس ـ سيدل ابتداءً من $x = y = 0$.

$$3x + y = 1$$
$$x + 2y = 2$$

«ب» هل يتم التقارب نحو الحل في «أ» عندما يزداد عدد الدورات؟ لماذا؟

س (3) : أكتب البرنامج الفرعي:

SUBROUTINE ELEM 1 (A, B, N)

الذي يقوم بالتعديلات اللازمة في المصفوفة المربعة A والمتجه B وذلك للتخلص من x_1 في جميع المعادلات (ما عدا المعادلة الأولى) في النظام الخطي AX = B المتكون من N معادلة. افترض أن $a_{11} \neq 0$.

الجزء الثاني

س (4) : **استكمل قيمة f(1.6) في الجدول التالي باستعمال جميع القيم المتوفرة:**

x	1.5	1.7	1.8
f(x)	6.9	8.1	9.6

س (5) : إذا كانت $|f'''(x)|$ لا تزيد عن 2 في الفترة [1.5, 1.8] فأوجد حداً أعلى للخطأ في تقدير f(1.6) في س (4).

س (6) : «أ» أحسب قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^2 x^3\,dx$ بطريقة سمبسن وذلك باستعمال n = 2 (حيث n هي عدد تقسيمات فترة التكامل).

«ب» ما هو الخطأ في التقريب المتحصل عليه في «أ»؟

س (7) : إذا كان الخطأ في تقريب تكامل بطريقة سمبسن مع تقسيم فترة التكامل إلى n فترة هو 0.0032 فقدر الخطأ عند استعمال 2n من الفترات.

س (8) : إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ فأوجد قيمة تقريبية للمشتقة f'(1) باستعمال الفرق المركزي مع أخذ $h = \Delta x = 0.1$.

الفصل السابع

الحل العددي للمعادلات التفاضلية

Numerical Solution of Differential Equations

7.1 مقدمة

تختلف المعادلة التفاضلية عن المعادلة الجبرية في كونها تحتوي على بعض مشتقات الدالة، وتعتبر المعادلة من المرتبة الأولى إذا كانت أعلى مرتبة للمشتقة التي تحتوي عليها هي المرتبة الأولى. وبصورة عامة فإن مرتبة المعادلة التفاضلية هي مرتبة أعلى مشتقة في هذه المعادلة. والصورة العامة لمعادلة تفاضلية من المرتبة الأولى هي:

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (1.1)$$

حيث f دالة في ثلاثة متغيرات y', y, x. وبنفس الطريقة، فإن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية هي:

$$f(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1.2)$$

مثال (1.1):

المعادلة: $y' + y - x^2 = 0$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى. والمعادلة:

$$2y'' + 3y' + xy - e^x = 0$$

هي معادلة من المرتبة الثانية.

إن بعض المعادلات التفاضلية سهلة الحل، فمثلاً المعادلة:

$$y' - y = 0$$

تمتلك الحل: $y = ce^x$

حيث c مقدار ثابت. ويمكن تحقيق هذا الحل وذلك بإيجاد y' وطرح هذه المشتقة من y للحصول على صفر. لاحظ أن هذا الحل العام يعبر عن ما لا نهاية من الحلول بناء على القيمة التي نختارها للثابت c. ولكن إذا اشترطنا أن يحقق الحل ما يسمى بالشرط الابتدائي وهو:

$$y(x_0) = y_0$$

يصبح الحل محدداً. فمثلاً إذا اشترطنا أن:

$$y(0) = 1$$

فإن حل المعادلة $y' - y = 0$ هو:

$$y(x) = e^x$$

وتسمى مسألة إيجاد حل معادلة تفاضلية مع شرط ابتدائي بمسألة القيمة الابتدائية (Initial-value problem). لإيجاد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية، نقوم بحساب قيمة y عند نقط محددة للمتغير x ولتكن:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

$$y_0, y_1, y_2, \ldots$$

حيث النقطة (x_0, y_0) هي الشرط الابتدائي وبالتالي فهي نقطة معلومة. أما القيم x_i فتكون عادة على أبعاد متساوية بمسافة h بينها، وبالتالي فإن:

$$x_i = x_0 + ih$$

7.2 طريقة أويلر Euler's Method

باستعمال متسلسلة تايلور، نحصل على:

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) \qquad (2.1)$$

حيث تقع ξ في الفترة $[x, x + h]$. إذا كانت h مقداراً صغيراً فبالإمكان استعمال التقريب:

$$y(x + h) \simeq y(x) + h\, y'(x) \qquad (2.2)$$

ويحتوي هذا التقريب على خطأ مقداره:

$$e_t = \frac{h^2}{2} y''(\xi)$$

ويعرف هذا الخطأ بخطأ الصيغة الموضعي (local truncation error) ويسمى التقريب (2.2) بطريقة أويلر. لتوضيح هذه الطريقة ندرس المثال التالي:

مثال (2.1):

استعمل طريقة أويلر لحساب y عند

$$x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$$

وذلك بأخذ قيمة:

$$h = 0.1$$

في حل المسألة:

$$y' = x + y$$
$$y(0) = 1$$

نلاحظ هنا من الشرط الابتدائي أن: $x_0 = 0$، $y_0 = 1$

وبالتالي فإن :

$$y_1 = y(0.1) = y(0) + (0.1)\,y'(0)$$

$$= 1 + (0.1)(0 + 1) = 1.1$$

$$y_2 = y(0.2) = y(0.1) + (0.1)\,y'(0.1)$$

$$= 1.1 + (0.1)(0.1 + 1.1) = 1.22$$

$$y_3 = y(0.3) = y(.2) + (0.1)(0.2 + 1.22) = 1.362$$

$$y_4 = y(0.4) = y(0.3) + (0.1)(0.3 + 1.362) = 1.5282$$

ملاحظة :

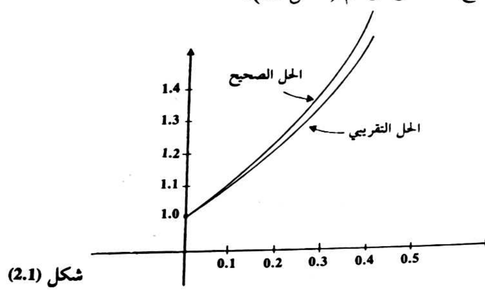
الحل الصحيح للمسألة في المثال السابق هو:

$$y(x) = 2e^{x} - (x + 1) \qquad (2.3)$$

ويمكن التحقق من ذلك بالتعويض في المعادلة والشرط الابتدائي. وبالتالي يمكن المقارنة بين هذا الحل الصحيح والحل التقريبي الذي تحصلنا عليه بطريقة أويلر وحساب الخطأ في الجدول التالي:

x	الحل التقريبي	الحل الصحيح	الخطأ
0	1	1	0
0.1	1.1	1.11	0.01
0.2	1.22	1.243	0.023
0.3	1.362	1.400	0.038
0.4	1.5282	1.5836	0.0554

لاحظ أن الحل الصحيح في هذا الجدول به تقريب بما يكفي لغرض المقارنة.
لاحظ أيضاً أن الخطأ يزداد كلما زادت x، أي كلما ابتعدنا عن نقطة البداية، كما يتضح ذلك من الرسم (شكل 2.1).



شكل (2.1)

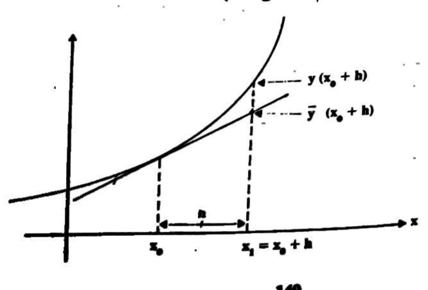
من الناحية الهندسية، فإن قيمة المشتقة الأولى عند نقطة تساوي ميل المماس عند هذه النقطة. أي:

$$y'(x_0) \approx \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h}$$

وبالتالي فإن:

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + h y'(x_0)$$

وهذا يعني أن طريقة أويلر تقرب النقطة $y(x_0 + h)$ بالقيمة $\bar{y}(x_0 + h)$ الواقعة على المماس كما هو مبين بالرسم (شكل 2.2).



شكل (2.2)

مثال (2) :

البرنامج الفرعي التالي يحسب: Y(2), Y(3), ..., Y(N)

وذلك بحل المعادلة التفاضلية : $Y' = F(X, Y)$

مع الشرط الابتدائي بأن :

$$Y = Y(1)$$

عند

$$X = X(1)$$

علماً بأن طول الخطوة H هو من المعطيات وأن N − 1 يساوي عدد الخطوات حيث N هي من المعطيات أيضاً.

```
      SUBROUTINE EULER (X, Y, N, H, F)
      DIMENSION X(N), Y(N)
      DO 10 I = 2, N
      Y(I) = Y(I − 1) + H * F(X (I−1), Y(I−1))
      X(I) = X(I − 1) + H
10    CONTINUE
      RETURN
      END
```

تمارين (1)

1 ـ حقق الحل المبين أمام كل معادلة من المعادلات التفاضلية الآتية وشرطها الابتدائي.

المعادلة	الشرط الابتدائي	الحل
$y' = -y^2$	$y(1) = 1$	$y = 1/x$
$y' = y + 2xe^x$	$y(0) = 0$	$y = x^2 e^x$
$y'' = 2\cos x - y$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 0$	$y = x \sin x$

2 ـ استعمل طريقة أويلر لحساب y_1 ،y_2 ،y_3 (بأخذ قيمة $h = .05$) في المعادلتين الأولى والثانية من تمرين 1 وقارن الحل التقريبي مع الحل الصحيح. استخدم 6 خانات عشرية في الحساب.

3 ـ بيِّن أن طريقة أويلر تكافىء استبدال y' بالفرق المقسوم :

$$y'_i \simeq (y_{i+1} - y_i)/h$$

4 ـ ما قيمة خطأ الصيغة الموضعي عند حل المعادلة : $y' = 2x + 1$

بطريقة أويلر باستخدام $h = 0.1$؟

5 ـ بيِّن بالرسم موقعي y_2, y_1 المتحصل عليها بطريقة أويلر لحل مسألة القيمة الابتدائية :

$$y' = 2x, y(0) = 0$$

مع أخذ $h = 0.5$. قارن على الرسم بالقيمة الصحيحة.

6 ـ إذا كانت y_i هي القيم المتحصل عليها بطريقة أويلر لحل المسألة :

$$y' = -100y, y(0) = 1$$

بين أن : $y_i = (1 - 100h)^i$

وأوجد قيمة الخطأ عندما :

$$x = 1, h = 0.1$$

ماذا تلاحظ عن هذا الخطأ؟

7 ـ اكتب برنامجاً رئيسياً لحساب y من $x = 0$ إلى $x = 1$ بطريقة أويلر مستعملاً $h = .01$ وذلك كحل للمسألة :

$$y' = x - y^2, y(0) = 1$$

7.3 طريقة متسلسلة تايلور

للحصول على دقة أكثر من طريقة أويلر، بالإمكان استعمال حدود أكثر في متسلسلة تايلور، وذلك على النحو:

(3.1)
$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_i)$$

فمثلاً: إذا استعملنا 3 حدود من هذه المتسلسلة، فإننا نحصل على:

(3.2)
$$y_{i+1} \simeq y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2} y_i''$$

حيث كالعادة:

$$y_i = y(x_i), \dots, y_i'' = y''(x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

وتعرف الصيغة (3.2) أحياناً باسم طريقة أويلر الموسعة (Extended Euler Method)، والخطأ الموضعي في هذه الصيغة هو:

(3.3)
$$e_t = \frac{h^3}{3!} y'''(\xi_i) \qquad x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$$

لاحظ أنه لحل المعادلة التفاضلية:

(3.4)
$$y' = f(x, y)$$

يمكن الحصول على y'' من الصيغة التالية:

(3.5)
$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

مثال (3.1):

احسب قيم تقريبية لـ y عندما

$x = 0.1, 0.2, 0.3$

من المعادلة التفاضلية:

$$y' = x + y$$
$$y(0) = 1$$

مستعملاً 3 حدود من متسلسلة تايلور.

بما أن $y' = x + y$ فبالتفاضل نحصل على:

$$y'' = 1 + y' = 1 + x + y$$

وبتطبيق الصيغة (3.2) نحصل على:

$$y_1 = 1 + 0.1\,(0 + 1) + .005\,(1 + 0 + 1)$$
$$= 1.11$$
$$y_2 = 1.11 + .1\,(.1 + 1.11) + .005\,(1 + .1 + 1.11)$$
$$= 1.24205$$
$$y_3 = 1.24205 + .1\,(.2 + 1.24205) + .005\,(1 + .2 + 1.24205)$$
$$= 1.398465$$

ملاحظة:

بالإمكان مقارنة الخطأ الناتج من استعمال 3 حدود في متسلسلة تايلور بالخطأ الناتج من استعمال طريقة أويلر وذلك من الحل الصحيح (2.3) كما في الجدول التالي:

x	الحل الصحيح	خطأ أويلر	خطأ تايلور
.1	1.11034	0.01034	0.00034
.2	1.2428	0.02280	0.00060
.3	1.39972	0.03377	0.00125

تمارين (2)

1 ـ لتكن:

$$y' = f(x, y), \; y'' = g(x, y)$$

حيث g, f دالتان معلومتان (معرفتان في برامج فرعية) اكتب البرنامج الفرعي الذي يحسب:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

من مسألة القيمة الابتدائية:

$$y' = f(x, y)$$
$$y_0 = y(x_0)$$

وذلك باستعمال 3 حدود من متسلسلة تايلور.

2 ـ أحسب y_1، y_2، y_3 باستعمال متسلسلة تايلور من 3 حدود، حيث:

$$y' = 2y + 1, \; y(0) = 0$$

افترض $h = 0.1$.

3 ـ ما هو الخطأ الموضعي الناتج من حل المعادلة:

$$y' = 2x^3 + 1$$

بطريقة تايلور بثلاثة حدود.

4 ـ أوجد قيمة تقريبية للجذر $\sqrt{2}$ وذلك بحل المعادلة:

$$y' = 1/(2y), \; y(0) = 1$$

رياضياً وعددياً بطريقة أويلر الموسعة. افترض أن $h = 0.5$

7.4 الخطأ الكلي والتقارب في طريقة أويلر

يسمى الخطأ الناتج من تراكم الأخطاء الموضعية من النقطة الابتدائية إلى أي نقطة **بالخطأ الكلي**. وبالتالي فإن الخطأ الكلي e_i هو الفرق بين الحل الصحيح Y_i والحل التقريبي y_i في نقطة ما x_i، أي أن:

$$e_i = Y_i - y_i$$

هذا الخطأ يعتمد على مقدار h (أي طول الخطوة). ولإيجاد العلاقة بين h وe_n نلاحظ أن طريقة أويلر هي العلاقة:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hy'_n \qquad (4.1)$$

ومن متسلسلة تايلور نجد أن:

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(x_n, Y_n) + \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n) \qquad (4.2)$$

$$f(x_n, Y_n) = f(x_n, y_n) + (Y_n - y_n)\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \eta_n) \qquad (4.3)$$

حيث ξ_n تقع بين x_n، x_{n+1} وأما η_n فتقع بين y_n، Y_n. والآن بطرح (4.1) من (4.2) نجد أن:

$$Y_{n+1} - y_{n+1} = (Y_n - y_n) + h[f(x_n, Y_n) - f(x_n, y_n)] + \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n)$$

ومن (4.3) نحصل على:

$$e_{n+1} = e_n\left[1 + h\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \eta_n)\right] + \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n)$$

بملاحظة أن $e_0 = 0$ وحساب e_1، e_2، . . . من هذه المعادلة نجد أن:

$$e_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} Y''(\xi_i)\, h^2 + 0(h^3) \qquad (4.4)$$

فإذا كان K بحيث أن: $|Y''(x)| < 2K$

لجميع قيم x في الفترة $[x_0, x_n]$ فإن:

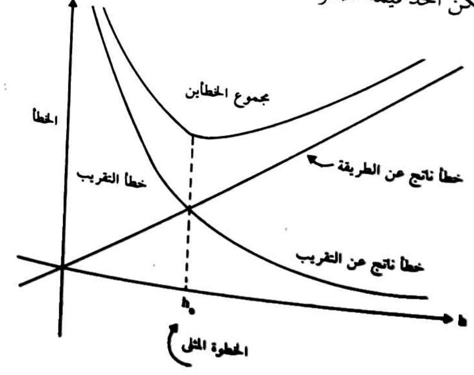
$$e_n \leq Knh^2 = K(x_n - x_0)\,h$$

وبالتالي فإن الخطأ الكلي في طريقة أويلر يتناسب طردياً مع طول الخطوة h وبذلك يؤول الخطأ إلى الصفر عندما تسعى h نحو الصفر، أي:

$$e_n \to 0 \;\Leftarrow\; h \to 0$$

وهذه هي خاصية التقارب (Convergence) في حل المعادلات التفاضلية بالطرق العددية.

من الناحية العملية، نحتاج إلى تقريب الأعداد نظراً لعدم إمكانية استعمال أعداد ذات خانات عديدة تفوق قدرة الجهاز في تمثيلها. وهذا ما يسبب خطأ التقريب (ويسمى أحياناً خطأ التدوير Roundoff error). وكلما صغرت h زاد هذا الخطأ نظراً لازدياد عدد العمليات الحسابية وبالتالي عمليات التقريب. والشكل (4.1) يوضح أن هناك نقطة مثلى h_0 يكون عندها الخطأ أصغر ما يمكن، ولا يمكن أخذ قيمة أصغر لـ h لأن خطأ التقريب سيزداد بصورة كبيرة.



شكل (4.1)

7.5 مسألة الاستقرار (Stability Problem)

لدراسة مسألة استقرار الطرق العددية في حل المعادلات التفاضلية، ندرس المسألة التالية:

$$Y' = -\lambda Y,\; Y(0) = y_0,\; \lambda > 0 \tag{5.1}$$

التي تمتلك الحل الوحيد:

$$Y = y_0\, e^{-\lambda x} \tag{5.2}$$

وبالتالي فإن:

$$Y \to 0 \text{ عندما } x \to \infty \tag{5.3}$$

وإذا استعملنا طريقة أويلر لحل المسألة (5.1) نحصل على:

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(x_i, y_i) = (1 - \lambda h)\,y_i$$

أي أن:

$$y_1 = (1 - \lambda h)\,y_0$$

$$y_2 = (1 - \lambda h)\,y_1 = (1 - \lambda h)^2\,y_0$$

$$y_n = (1 - \lambda h)^n\,y_0 \tag{5.4}$$

بالمقارنة بين الحل التقريبي y_n والحل الصحيح Y، فإن y_n يجب أن تؤول إلى الصفر عندما تسعى n إلى ما لا نهاية. وهذا لا يحدث إلا عندما:

$$|1 - \lambda h| < 1 \tag{5.5}$$

أي عندما: $0 < \lambda h < 2$

يعرف هذا الشرط بشرط الاستقرار لطريقة أويلر. لاحظ من (5.4) أن في حالة عدم تحقق هذا الشرط فإن الخطأ (عندما x تسعى إلى ما لا نهاية) لا يؤول إلى الصفر. لاحظ أن هذه النتيجة تنطبق فقط على المعادلة (5.1) التي تعرف بمعادلة الاختبار حيث نختبر بها ما إذا كانت الطريقة العددية لحل المعادلات التفاضلية مستقرة (Stable) أو غير مستقرة (unstable) أو مشروطة الاستقرار (Conditionally Stable). وعلى ذلك، فإن طريقة أويلر تعتبر مشروطة الاستقرار، والشرط هو (5.5).

تمارين (3)

1 - أثبت أن الخطأ الكلي في طريقة تايلور بثلاثة حدود يتناسب مع h^2.

2 - أوجد شرط الاستقرار في طريقة تايلور بثلاثة حدود.

3 - إذا كانت قيمة y_0 الابتدائية ذات خطأ مقداره e_0، فبيِّن أن الخطأ الكلي في y_n (عند حل معادلة الاختبار بطريقة أويلر) هو:

$$e_n = [1 - \lambda h]\, e_{n-1} + \frac{h^2\lambda^2}{2} y''(\xi_n) \qquad x_n \le \xi_n \le x_{n+1}$$

وبالتالي أوجد الشرط على λh حتى يؤول e_n إلى الصفر عندما $n \to \infty$.

4 - في حل المعادلة $y' = -20y$ مع $y(0) = \frac{1}{3}$ استعملت طريقة أويلر لحساب y عندما $x = 1$، احسب الخطأ الناتج عنه عند النقطة الأخيرة:

أ) عندما $h = .05$

ب) عندما $h = 0.2$

7.6 الطرق الضمنية Implicit Methods

نعرف من المبرهنات الأساسية في التفاضل والتكامل أن:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx \qquad (6.1)$$

وبالتالي، فبالإمكان الحصول على صيغ لحل المعادلات التفاضلية باستعمال إحدى الطرق التقريبية في التكامل. فمثلاً إذا استعملنا التقريب:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx \simeq hy'(x_i) \qquad (6.2)$$

نحصل على طريقة أويلر من (6.1)، (6.2):

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i$$

أما إذا استعملنا التقريب:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = hy'(x_{i+1}) \qquad (6.3)$$

نحصل بالتعويض في (6.1) على الطريقة:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1} \qquad (6.4)$$

وتعرف عادة «بطريقة الفرق المتأخر» حيث إنها تستعمل التقريب:

$$y'_{i+1} \simeq (y_{i+1} - y_i)/h \qquad (6.5)$$

وهو تقريب الفرق المتأخر.

أما إذا استعملنا قاعدة شبه المنحرف:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[y'_i + y'_{i+1}\right] \qquad (6.6)$$

فإننا نحصل على:

$$y_{i+1} \simeq y_i + \frac{h}{2}\left[y'_i + y'_{i+1}\right] \qquad (6.7)$$

والتي إذا استخدمناها في حل المعادلة:

$$y' = f(x, y)$$

تصبح كالآتي:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] \quad (6.8)$$

توصف الطريقتان (6.4) و (6.7) بأنهما من **الطرق الضمنية** لأن y_{i+1} موجودة ضمن متغيرات الدالة f، وهو ما يجعل حساب y_{i+1} متعذراً في أغلب الأحيان. ومع ذلك، فإن هذه الطرق تستعمل أحياناً نظراً لمزايا الاستقرار التي تتمتع بها.

> **مثال (6.1):**
>
> بيِّن أن طريقتي الفرق المتأخر وشبه المنحرف مستقرتان (بدون شرط).

نطبق الطريقة الأولى على معادلة الاختبار:

$$y' = f(x, y) = -\lambda y$$

لنحصل على:

$$y_{i+1} = y_i - \lambda h y_{i+1}$$

أي:

$$(1 + \lambda h)\, y_{i+1} = y_i$$

أو:

$$y_1 = \frac{y_0}{1 + \lambda h}$$

و:

$$y_2 = \frac{y_1}{1 + \lambda h} = \frac{y_0}{(1+\lambda h)^2}$$

وبصورة عامة:

$$y_n = \frac{y_0}{(1+\lambda h)^n}$$

ونظراً لأن $\lambda>0$ و $h>0$ فإن $1+\lambda h>1$ وبالتالي فإن y_n **تؤول إلى الصفر** عندما تسعى n إلى ما لا نهاية، وهذا يعني أن **الطريقة مستقرة بدون شرط.**

وبطريقة مماثلة فإن تطبيق (6.8) على معادلة الاختبار يؤدي إلى:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

$$= y_i - \frac{\lambda h}{2}[y_i + y_{i+1}]$$

أي أن:

$$\left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y_{i+1} = \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) y_i$$

ومنها نستنتج أن:

$$y_n = \left(\frac{2-\lambda h}{2+\lambda h}\right)^n y_0$$

وشرط الاستقرار بأن y_n **تؤول إلى الصفر عندما تسعى n إلى ما لا نهاية** يتحقق في هذه الحالة عندما:

$$-1 < \frac{2-\lambda h}{2+\lambda h} < 1$$

وهذا الشرط يتحقق طالما إن $\lambda h > 0$. **وبالتالي فإن طريقة شبه المنحرف** مستقرة بدون شرط.

7.7 طريقة أويلر المعدّلة Modified Euler's Method

تتطلب المعادلة (6.8) حلاً للمجهول y_{i+1}، **وهذا الحل ليس سهلاً إذا كانت** f غير خطية في y ولذلك نلتجىء إلى الحل التكراري **باستعمال طريقة النقطة** الثابتة:

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})\right] \quad (7.1)$$

حيث يرمز (k) إلى الدورة k. لاحظ أن هذه الصيغة تحتاج إلى قيمة ابتدائية $y_{i+1}^{(0)}$ ويمكن الحصول عليها مثلاً من طريقة أويلر، أي:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \qquad (7.2)$$

إذا تم استعمال دورة واحدة فقط في الصيغة (7.1) فإن (7.1) مع (7.2) تسمى بطريقة أويلر المعدلة. أي أن هذه الطريقة تتكون من خطوتين هما:

$$p_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad (7.3)$$

$$y_{i+1} = y_{i+1} + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, p_{i+1})\right]$$

حيث تم استعمال p_{i+1} بدلاً من $y_{i+1}^{(0)}$ لتسهيل الكتابة. تسمى الخطوة الأولى من (7.3) بصيغة التنبؤ والخطوة الثانية بصيغة التصحيح، ولذلك توصف طريقة أويلر المعدلة بأنها من طرق التنبؤ والتصحيح (predicator-corrector).

مثال (7.1):
استعمل طريقة أويلر المعدلة لحساب y_1 و y_2 علماً بأن:

$$y' = y + e^x,\ y(0) = 0,\ h = .1$$

$$f(x, y) = y + e^x$$

في هذه الحالة:

$$P_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0) = 0.1$$

وبالتالي

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(0,0) + f(.1, .1)\right] = 0.11025$$

$$P_2 = y_1 + h\, f(x_1\, y_1) = 0.23179$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, p_2)\right] = 0.24368$$

ملاحظة:
الحل الصحيح للمسألة في مثال (7.1) هو: $y(x) = xe^x$

ومن ذلك، نحسب الخطأ في y_1، y_2، أي:

$$e(.1) = (.1)\, e^{.1} - .11025 = .00027$$

$$e(.2) = (.2)\, e^{.2} - .24368 = .00060$$

مثال (7.2):
أحسب y_1 و y_2 في المثال السابق بطريقة شبه المنحرف وقارن الخطأ بطريقة أويلر المعدلة.

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\right]$$

$$= y_0 + \frac{h}{2}(y_0 + e^{x_0}) + \frac{h}{2}(y_1 + e^{x_1})$$

بنقل y_1 إلى الطرف الأيسر، نحصل على:

$$\left(1 - \frac{h}{2}\right) y_1 = \left(1 + \frac{h}{2}\right) y_0 + \frac{h}{2}\left(e^{x_0} + e^{x_1}\right)$$

$$y_1 = \frac{1 + h/2}{1 - h/2}\, y_0 + \frac{h/2}{1 - h/2}\left(e^{x_0} + e^{x_1}\right)$$

وبعد التعويض نحصل على:

$$y_1 = .11070$$

وبالطريقة نفسها:

$$y_2 = .24467$$

والخطأ في هذه الحالة هو:

$$e(.1) = (.1)\, e^{.1} - .11070 = -\ .00018$$

$$e(.2) = (.2)\, e^{.2} - .24467 = -\ .00039$$

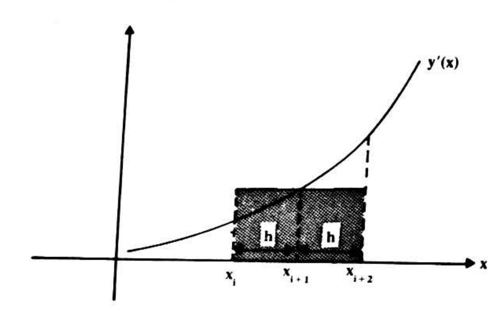
ونلاحظ أن الخطأ هنا أقل من المتحصل عليه بطريقة أويلر المعدلة، وهذا متوقع حيث إن هذه الطريقة هي حالة خاصة من طريقة شبه المنحرف.

7.8 طريقة نقطة المنتصف Mid-Point Method

التقريب التالي:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} y'(x)\,dx \simeq 2hy_{i+1} \qquad (8.1)$$

يسمى بتقريب نقطة المنتصف حيث يتم تقريب المساحة تحت المنحنى $y'(x)$ من x_i إلى x_{i+2} بمساحة المستطيل المبين بالشكل التالي:



بتطبيق (8.1) في حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = f(x, y)$$

نحصل على الصيغة:

$$y_{i+2} = y_i + 2h\, f(x_{i+1}, y_{i+1}) \qquad (8.2)$$

وتعرف هذه الطريقة بطريقة نقطة المنتصف. تختلف هذه الطريقة عن الطرق التي سبق لنا دراستها حتى الآن من حيث إن حساب y_2 يتطلب معرفة y_0, y_1،

ولذلك تعرف مثل هذه الطريقة بطريقة الخطوتين two-step method. ويعني هذا أنه يجب الحصول على y_1 بطريقة أخرى مثل طريقة أويلر، ثم نستخدم طريقة نقطة المنتصف للحصول على بقية القيم y_i.

مثال (8.1):

استعمل طريقة نقطة المنتصف لحساب $y(.2)$ علماً بأن:

$$y(0) = 0,\ y(.1) = .1105$$
$$y' = y + \exp(x)$$

باستعمال طريقة نقطة المنتصف (8.2) نحصل على:

$$y_2 = y_0 + 2(.1)\, f(.1, .1105)$$
$$= 2(.1)\,(.1105 + e^{.1}) = .24313$$

نلاحظ هنا أن حل هذه المسألة الصحيح هو:

$$y(.2) = (.2)\, e^{.2} = .24428$$

أي أن الخطأ المطلق هو 0.00115.

مثال (8.2):

ما هي مرتبة الخطأ الموضعي في طريقة نقطة المنتصف

لإيجاد الخطأ نستعمل متسلسلة تايلور:

$$y_{i+2} = y_i + 2h\,y_i' + \frac{(2h)^2}{2!}\,y_i'' + \frac{(2h)^3}{3!}\,y_i''' + \ldots$$
$$= y_i + 2h\,y_i' + 2h^2\,y_i'' + \frac{4}{3}\,2h^3\,y_i''' + \ldots$$

وأيضاً:

$$y'_{i+1} = y'_i + hy''_i + \frac{h^2}{2} y'''_i + \dots$$

إذن:

$$y_{i+2} = y_i + 2h\left[y'_{i+1} - hy''_i - \frac{h^2}{2} y'''_i - \dots\right] + 2h^2 y''_i + \frac{4h^2}{3} y'''_i + \dots$$

$$= y_i + 2h\, y'_{i+1} + \left[\frac{4}{3} - 1\right] h^3 y'''_i + \dots$$

بالمقارنة مع صيغة نقطة المنتصف نجد أن الخطأ الموضعي من المرتبة الثالثة $O(h^3)$، وهي مرتبة جيدة إذا قورنت مثلاً بطريقة أويلر. ولكن مشكلة **طريقة نقطة المنتصف** هي عدم استقرارها، كما يوضح المثال التالي:

مثال (8.3):
ناقش مسألة الاستقرار لطريقة نقطة المنتصف.

بتطبيق هذه الطريقة على معادلة الاختبار:

$$y' = -\lambda y, \lambda > 0$$

نحصل على:

$$y_{i+2} = y_i - 2\lambda h y_{i+1}$$

يمكن الحصول على حل لهذه المعادلة (وهي نوع من معادلات الفروق) بافتراض حل على الشكل:

$$y_i = r^i$$

وبالتالي فإن:

$$y_{i+1} = r^{i+1}, y_{i+2} = r^{i+2}$$

إذن:

$$r^{i+2} = r^i - 2\lambda h r^{i+1}$$

باختصار r^i نحصل على المعادلة:

$$r^2 + 2\lambda hr - 1 = 0$$

التي جذراها هما:

$$r_1 = -\lambda h + \sqrt{\lambda^2 h^2 + 1}$$

$$r_2 = -\lambda h - \sqrt{\lambda^2 h^2 + 1}$$

لاحظ هنا أن:

$$|r_2| > 1$$

لجميع قيم λh الموجبة، وبالتالي فإن:

$$y_i = c_1 r_1^i + c_2 r_2^i$$

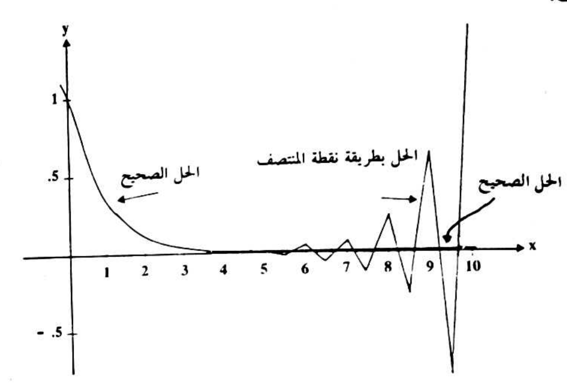
سيسعى نحو ما لا نهاية مع تذبذب بين السالب والموجب عندما تزداد قيمة i لأن $r_2 < -1$ وبالتالي فإن طريقة نقطة المنتصف **غير مستقرة على الإطلاق.**

ملاحظة:

لاختبار تأثير عدم الاستقرار على **النتائج المتحصل عليها من طريقة نقطة المنتصف**، نكتب برنامجاً للحصول على حل للمعادلة $y' = -y$، $y(0) = 1$ من $x = 0$ إلى $x = 10$ بخطوة مقدارها h حيث $h = .1$. **والجدول التالي يبين هذه** النتائج.

x_i	y_i	e^{-x_i}
1.0	0.36686655	0.3678795
2.0	0.136325	0.1353353
3.0	0.05152451	0.04978707
4.0	0.02248718	0.01831564
5.0	0.01778869	0.006737947
6.0	0.0322369	0.00248752
7.0	0.08188403	0.00091188
8.0	0.2200514	0.00033546
9.0	0.5963729	0.000123409
10.0	1.6181290	.0000454

لاحظ هنا أن الحل العددي y_i يتناقص عندما $x < 6$ ولكنه يبدأ في التزايد عند $x \approx 6$، بينما الحل الصحيح يستمر في التناقص، والشكل (8.1) يبين ذلك.



الشكل (8.1)

7.9 الصيغة العامة للطرق العددية

يمكن وضع الطرق العددية المستعملة في حل المعادلات التفاضلية على الصورة:

$$y_{i+k} = \phi(x_i, y_i, \ldots, x_{i+k}, y_{i+k}) \quad (9.1)$$

حيث k هو عدد الخطوات. فمثلاً في طريقة أويلر $(k = 1)$ و

$$\phi(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (9.2)$$

وفي طريقة شبه المنحرف $(k=1)$ و

$$\phi(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

أما في طريقة نقطة المنتصف فإن $k=2$ و

$$\phi(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i + 2h f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

نلاحظ أيضاً أن الصورة العامة للدالة ϕ هي:

$$\phi(x_i, y_i, \ldots, x_{i+k}, y_{i+k}) = \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i+1} + \ldots + \alpha_{k-1} y_{i+k-1} + \beta_0 hf(x_i, y_i) + \beta_1 hf(x_{i+1}, y_{i+1}) + \ldots + \beta_k hf(x_{i+k}, y_{i+k}) \quad (9.3)$$

أي أنه في طريقة أويلر $\beta_0 = 1, \alpha_0 = 1$ وبقية المعاملات أصفار، أما في طريقة نقطة المنتصف حيث $k=2$ فإن $\alpha_0 = 1$، $\alpha_1 = 0$، $\beta_0 = 0$، $\beta_1 = 2$، $\beta_2 = 0$.

كما يلاحظ أن الطريقة (9.1) تعتبر ضمنية Implicit إذا كانت $\beta_k \neq 0$ وتعتبر طريقة صريحة (Explicit) عندما يكون هذا المعامل صفراً.

إذا طبقنا الطريقة العامة (9.1) على معادلة اختبار الاستقرار:

$$y' = -\lambda y, \lambda > 0$$

نحصل على:

$$y_{i+k} = (\alpha_0 - \lambda h \beta_0) y_i + (\alpha_1 - \lambda h\beta_1) y_{i+1} + \cdots + (\alpha_{k-1} - \lambda h\beta_{k-1}) y_{i+k-1} - \lambda h\beta_k y_{k+i} \quad (9.4)$$

للحصول على حل لمعادلة الفروق (9.4) في الصورة:

$$y_i = r^i \quad (9.5)$$

نعوض هذه الصيغة في (9.4)، لنحصل على المعادلة:

$$p(r) = (\lambda h\beta_0 - \alpha_0) + \ldots + (\lambda h\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}) r^{k-1} + (1 + \lambda h\beta_k) r^k = 0 \quad (9.6)$$

وهي معادلة متعددة الحدود من الدرجة k وبالتالي لها عدد k من الجذور هي: r_1، r_2، ....، r_k.

تسمى (9.6) بمتعددة الحدود الذاتية. فمثلاً في طريقة أويلر ($k=1$، $\beta_0 = 1$

$\alpha_0 = 1$، $\beta_1 = 0$) نحصل على متعددة الحدود من الدرجة الأولى:

$$p(r) = r + (\lambda h - 1) = 0$$

التي تمتلك الحل الوحيد:

$$r_1 = 1 - \lambda h$$

وكمثال آخر فإن $p(r)$ لطريقة نقطة المنتصف يمكن الحصول عليها بملاحظة أن $k = 2$، $\alpha_0 = 1$، $\alpha_1 = 0$، $\beta_1 = 2$، $\beta_0 = \beta_2 = 0$.

$$p(r) = r^2 + 2\lambda hr - 1$$

من تعريف الاستقرار، يمكن استنتاج أن أي صيغة عددية لحل المعادلات التفاضلية تعتبر مستقرة إذا كانت متعددة الحدود $p(r)$ الخاصة بها تمتلك جذوراً r_i بحيث:

$$|r_i| < 1 \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{9.7}$$

لاحظ أن الجذور r_i تعتمد على σ حيث:

$$\sigma = \lambda h$$

ولذلك وجب أن تكون قيمة σ صغيرة بما يكفي تحقيق (9.7) حتى تكون الصيغة المستعملة مستقرة.

تمارين (4)

1 - استعمل متسلسلة تايلور لإيجاد مرتبة الخطأ الموضعي في طريقة «أ» الفرق الخلفي «ب» شبه المنحرف «حـ» طريقة أويلر المعدلة.

2 - استعمل «أ» طريقة الفرق المتأخر «ب» طريقة شبه المنحرف «حـ» طريقة أويلر المعدلة، لحساب y_1, y_2 بأخذ $h = .5$، وحل المسألة:

$$y' + xy = x^3 + 2x$$
$$y(0) = 0$$

لاحظ أن الحل هو: $y = x^2$

قارن بين الحلول العددية مع التعليق.

3 - **أكتب برنامجاً لحساب y عند النقاط:**

$$x = .1, .2, \ldots, 1$$

وذلك بطريقة أويلر المعدلة لحلّ المعادلة:

$$y' = y^2 + 1$$
$$y(0) = 0$$

4 - حل المعادلة في تمرين (3) **بطريقة نقطة المنتصف. لاحظ أن الحل** الصحيح هو:

$$y = \tan(x)$$

لذلك فبالإمكان أخذ: $y_1 = \tan(0.1)$

قارن بين الحل العددي **والحل التحليلي (الصحيح).**

5 - أكتب البرنامج في تمرين (3) **بطريقة نقطة المنتصف بدلاً من طريقة أويلر** المعدلة مع افتراض $y_1 = \tan(0.1)$.

6 - بالإمكان التعديل في طريقة **نقطة المنتصف حتى تصبح أكثر استقراراً** وذلك على النحو التالي:

$$p_i = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, p_i)$$

«أ» طبق هذه الطريقة لحل المعادلة: $y' = -2y \quad y(0) = 1$

مستعملاً:

$$i = 0, 1, 2$$
$$h = 0.1$$

«ب» **ما هو شرط الاستقرار في هذه الطريقة؟**

(جـ) مستعملاً متسلسلة تايلور، أوجد مرتبة الخطأ الموضعي لهذه الطريقة في حل معادلة الاختبار: $y' = -\lambda y$

(د) أكتب البرنامج الفرعي الذي يستعمل هذه الطريقة في حل $y' = f(x, y)$.

7.10 طريقة ملن Milne's Method

إن هذه الطريقة هي أكثر دقة من الطرق السابقة وهي تستفيد من طريقة سمبسن في التكامل العددي:

(10.1)
$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} g(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[g(x_i) + 4g(x_{i+1}) + g(x_{i+2})\right]$$

حيث الخطأ الموضعي في هذا التقريب هو:

(10.2)
$$e_i = -\frac{h^5}{90}\, g^{IV}(\xi_i)$$

فإذا وضعنا

$$y' = g(x) = f(x, y)$$

نحصل على:

(10.3)
$$y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3}\left[f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right]$$

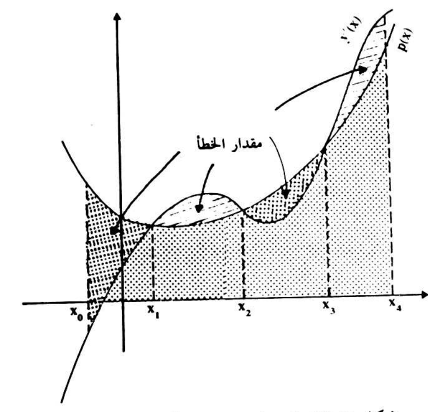
حيث f_i هي $f(x_i, y_i)$. نلاحظ هنا أن (10.3) صيغة ضمنية ذات خطوتين، وبالتالي نحتاج إلى صيغة تنبؤ. وقد اقترح ملن استعمال الصيغة التالية لهذا الغرض:

(10.4)
$$p_{i+2} = y_{i-2} + \frac{4h}{3}\left[2f_{i-1} - f_i + 2f_{i+1}\right]$$

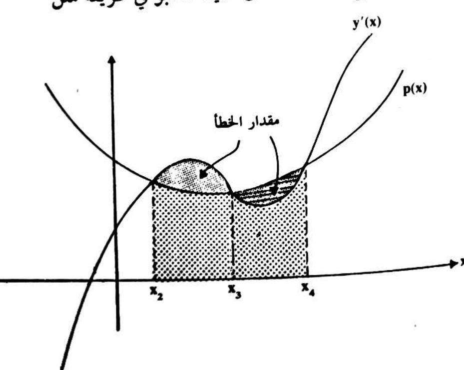
ويمكن الحصول على هذه الصيغة من التقريب:

$$\int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} y'\,dx \simeq \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} p(x)\,dx$$

حيث $p(x)$ هي متعددة حدود الاستكمال من الدرجة الثانية للنقط (x_{i-1}, y'_{i-1})، (x_i, y'_i)، (x_{i+1}, y'_{i+1}). أنظر تمرين (1) من مجموعة تمارين (5) والأشكال (10.1)، (10.2) للتوضيح.



شكل (10.1) اشتقاق صيغة التنبؤ في طريقة ملن



شكل (10.2) اشتقاق صيغة التصحيح في طريقة ملن.

لاحظ أن طريقة ملن في التنبؤ تتكون من 4 خطوات، أي أن حساب y_5 مثلاً يتطلب معرفة y_4، y_3، y_2، y_1.

مثال (10.1):

أكتب برنامجاً فرعياً يحسب: $y_5, y_6, \ldots, y_n$

وذلك باستعمال طريقة ملن في حل المعادلة:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_1) = y_1$$

مع اعتبار أن y_2، y_3، y_4 وx_2، x_3، x_4 قد تم حسابها في البرنامج الرئيسي.

```
      SUBROUTINE MM (X, Y, N, H, F)
      DIMENSION X(N), Y(N)
      F2 = F(X(2), Y(2))
      F3 = F(X(3) , Y(3))
      F4 = F(X(4), Y(4))
      DO 10 I = 5, N
      P = Y(I - 4) + (4 * H/3) * (2* F2 - F3 + 2* F4)
      Y(I) = Y(I - 2) + (H/3) * (F3 + 4* F4 + F (X(I), P))
      F2 = F3
      F3 = F4
10    F4 = F(X(I), Y(I))
      CONTINUE
      RETURN
      END
```

7.11 طريقة رانج كوتا Runge-Kutta Method

تضمّ هذه الطريقة مجموعة من الطرق لها مراتب مختلفة للخطأ، إلا أن أشهر هذه الطرق هي ذات المرتبة الخامسة في الخطأ الموضعي أي $O(h^5)$ وتعتمد على الصيغة التالية:

لحل المسألة:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

أحسب: $(i = 0, 1, 2, \ldots)$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h f(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (11.1)$$

مثال (11.1):

أحسب y_1 بطريقة رانج كوتا إذا كان

$$y' = e^{-x} - y, y(0) = 0, h = 0.1$$

في هذه الحالة:

$$f(x, y) = e^{-x} - y$$

$$k_1 = h f(0, 0) = .1$$

$$k_2 = h f(0 + .1/2, 0 + .1/2) = .1 (e^{-.05} - .05)$$

$$= .0901229$$

$$k_3 = h f(0 + .1/2, 0 + .0901229/2) = .09061679$$

$$k_4 = h f(.1, .09061679) = .081422$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = .090483933$$

ملاحظات:

الحل الصحيح في المثال السابق هو:

$$y(.1) = (.1)\exp(-.1) = .09048374$$

وبالتالي فإن الخطأ في هذه القيمة التي تحصلنا عليها بسيط جداً وفي حدود .0000002. وهذا يدل على الدقة العالية التي تتمتع بها طريقة رانج كوتا. إلا أننا يجب ألّا ننسى أن المجهود الحسابي في هذه الطريقة هو مثلاً ضعف المجهود في طريقة أويلر المعدلة حيث إن كل خطوة في طريقة رانج كوتا تتطلب حساب الدالة f أربع مرات بينما يتم ذلك مرتين فقط في طريقة أويلر المعدلة.

مثال (11.2):
بيّن أن طريقة رانج كوتا تؤول إلى طريقة ملن (خطوة التصحيح) في حل المعادلة:

$$y' = f(x)$$

أي عندما f تعتمد على x فقط.

في هذه الحالة:

$$k_1 = h\,f(x_i)$$

$$k_2 = h\,f(x_i + \frac{h}{2})$$

$$k_3 = h\,f(x_i + \frac{h}{2})$$

$$k_4 = h\,f(x_i + h)$$

أي أن $k_2 = k_3$ وبالتالي فإن:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_i + h)\right]$$

وهي صيغة التصحيح نفسها في طريقة ملن بخطوة مقدارها $\frac{h}{2}$.

مثال (11.3):
أكتب برنامجاً فرعياً لحساب Y (I + 1) من Y(I) و X(I) بطريقة رانج كوتا لحل المعادلة $Y' = F(X, Y)$
واستعمله لايجاد قيمة y عند x = 1 في حل المعادلة $y(0) = 1, y' = xy$.
(في هذا البرنامج الفرعي أطلق على Y(I + 1) اسم YNEW واطلق الاسم YOLD على Y(I)).

```
      SUBROUTINE RK4 (X, YOLD, YNEW, H, F)
      REAL K1, K2, K3, K4
      K1 = H * F (X, YOLD)
      K2 = H * F (X + H/2, YOLD + K1/2)
      K3 = H * F (X + H/2, YOLD + K2/2)
      K4 = H * F (X + H, YOLD + K3)
      YNEW = YOLD + (K1 + 2*K2 + 2* K3 + K4)/6.
      RETURN
      END
```

البرنامج الرئيسي لحل المسألة وإيجاد قيمة y عند x = 1 كما يلي:

```
      EXTERNAL F
      X = 0
      Y = 1
      H = 0.1
10    CALL RK4 (X, Y, YN, H, F)
      X = X + H
      IF (X. GE. 1. 0) GO TO 20
      Y = YN
      GO TO 10
20    WRITE (*, *) Y
      STOP
      END
```

لاحظ أن هذا البرنامج يجب أن يحتوي على برنامج فرعي لتعريف الدالة F، وفي هذا المثال الدالة هي:

```
      FUNCTION F (X, Y)
      F = X * Y
      RETURN
      END
```

مثال (11.4):

بيِّن أن طريقة رانج كوتا لها خطأ موضعي من المرتبة الخامسة عند حل المعادلة $y' = y$.

نلاحظ أولاً أن $y' = y$ تعني أن: $y = y' = y'' = y''' = \dots$

وبالتالي من متسلسلة تايلور:

$$y_{i+1} = y_i + h\,y_i + \frac{h^2}{2!}\,y_i + \frac{h^3}{3!}\,y_i + \frac{h^4}{4!}\,y_i + O(h^5)$$

ومن طريقة رانج كوتا، نحصل على y^*_{i+1} (أي القيمة التقريبية لـ y_{i+1}) كالآتي:

$$k_1 = hf(x_i, y_i) = hy_i$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) = hy_i + \frac{h^2 y_i}{2}$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) = hy_i + \frac{h^2}{2} y_i + \frac{h^3}{4} y_i$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) = hy_i + h^2 y_i + \frac{h^3}{2} y_i + \frac{h^4}{4} y_i$$

$$y^*_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left[hy_i + 2hy_i + h^2 y_i + 2hy_i + h^2 y_i + \frac{h^3}{2} y_i + hy_i + h^2 y_i + \frac{h^3}{2} y_i + \frac{h^4}{4} y_i\right]$$

$$= y_i + \frac{1}{6}\left[6hy_i\right] + \frac{1}{6}\left[3h^2 y_i\right] + \frac{1}{6}\left[h^3 y_i\right] + \frac{1}{6}\left[\frac{h^4 y_i}{4}\right]$$

$$= y_i + hy_i + \frac{h^2}{2} y_i + \frac{h^3}{6} y_i + \frac{h^4}{24} y_i$$

ومن تعريفنا للخطأ الموضعي بأنه الفرق بين y^*_{i+1} و y_{i+1} نرى بأنه يتناسب مع h^5 وبالتالي فهو من المرتبة الخامسة.

تمارين (5)

1 - استعمل طريقة ملن (صيغة التصحيح فقط) لحساب y عند x = .2، .3، بحل المعادلة $y' = -y$ واعتبار:

$$y(0) = 1, \; y(.1) = .90483743$$

2 - بيِّن أن صيغة التصحيح في طريقة ملن (قاعدة سمسن) غير مستقرة.

3 - اكتب برنامجاً لحساب y عند x = .4، .5، .6، ....، 1 بحل المعادلة:

$$y' = xy^2 + 1$$
$$y(0) = 1$$

وحساب y(.1)، y(.2)، y(.3) بطريقة أويلر المعدلة مستعملاً h = .05 في طريقة أويلر المعدلة وثم h = 0.1 في طريقة ملن.

4 - أعد كتابة البرنامج في تمرين -3- مستعملاً طريقة رانج كوتا بدلاً من طريقة أويلر المعدلة.

5 - أحسب y عند x = .1, x = .2 بطريقة رانج كوتا في حل المعادلة:

$$y' = y^2 + 1, \; y(0) = 0$$

قارن بالحل الصحيح:

$$y = \tan(x)$$

6 - بيِّن أن:

$$|c(\phi)| = \left|1 - \phi + \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{6} + \frac{\phi^4}{24}\right| < 1$$

هو الشرط في الاستقرار في طريقة رانج كوتا ($\phi = h\lambda$). حاول تحديد هذه الفترة بأخذ قيم مختلفة لـ ϕ، ورسم $c(\phi)$.

7.12 حل المعادلات التفاضلية الآنية

كثيراً ما تواجه الدارس في العلوم الطبيعية معادلات تفاضلية آنية (Simultaneous differential equations) على النحو:

$$y' = f(x, y, u)$$

$$u' = g(x, y, u) \qquad (12.1)$$

وهما معادلتان تفاضليتان في مجهولين هما u, y وكلاهما يعتمد على المتغير x. في هذه الحالة نحتاج إلى شرطين ابتدائيين، أي:

$$y(x_0) = y_0,\ u(x_0) = u_0$$

مثال (12.1):

استعمل طريقة أويلر لحساب u, y عند x = .1 من المعادلتين:

$$y' = xy + u$$

$$u' = uy + 1$$

والشرطين الابتدائيين:

$$y(0) = 0,\ u(0) = 1$$

نلاحظ هنا أن:

$$f(x, y, u) = xy + u$$

$$g(x, y, u) = uy + 1$$

إذن بطريقة أويلر:

$$y(.1) = y(0) + (.1)\, f(0, 0, 1) = 0.1$$

$$u(.1) = u(0) + (.1)\, g(0, 0, 1) = 1.1$$

مثال (12.2):

استعمل طريقة أويلر المعدلة لحل المثال (12.1):

$$\bar{y}\,(.1) = y(0) + (.1)\, f(0, 0, 1) = 0.1$$

$$\bar{u}\,(.1) = u(0) + (.1)\, g(0, 0, 1) = 1.1$$

وهي القيم التقديرية ويتم تصحيحها بالآتي:

$$y(.1) = y(0) + \frac{(.1)}{2}\left[f(0, 0, 1) + f(0.1, 0.1, 1.1)\right]$$

$$= (.05)\,(1 + 1.11)$$

$$= (.05)\,(2.11)$$

$$= .1055$$

$$u(.1) = u(0) + \frac{(.1)}{2}\left[g(0, 0, 1) + g(.1, .1055, 1.1)\right]$$

$$= 1 + (.05)\left[1 + (1.1)(.1055) + 1\right]$$

$$= 1.1058025$$

مثال (12.3):

استعمل طريقة رانج كوتا لكتابة برنامج فرعي لحل المعادلتين (12.1) من النقطة الابتدائية

X(1), Y(1), U(1)

إلى النقطة X(N), Y(N), U(N)

```
SUBROUTINE RKM (X, Y, U, F, G, H, N)
REAL K1, K2, K3, K4, L1, L2, L3, L4
DIMENSION X(N), Y(N), U(N)
DO 10 I = 1, N - 1
XI = X(I)
YI = Y(I)
UI = U(I)
K1 = H * F (XI, YI, UI)
L1 = H * G(XI, YI, UI)
K2 = H * F (XI + H/ 2, YI + K1/ 2, UI + L1/ 2)
L2 = H * G (XI + H/ 2, YI + K1/ 2, UI + L1/ 2)
K3 = H * F (XI + H/ 2, YI + K2/ 2, UI + L2/ 2)
L3 = H * G (XI + H/ 2, YI + K2/ 2, UI + L2/ 2)
K4 = H * F (XI + H, YI + K3, UI + L3)
L4 = H * G (XI + H, YI + K3, UI + L3)
X (I + 1) = X (I) + H
Y (I + 1) = YI + (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)/ 6
U (I + 1) = UI + (L1 + 2 * L2 + 2* L3 + L4)/ 6
CONTINUE
10 RETURN
END
```

7.13 المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية

الشكل العام للمعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية التي نحن بصدد دراستها هو:

$$y'' = g(x, y, y')$$

حيث g دالة في ثلاثة متغيرات (على الأكثر) هي y', y, x. تعتبر هذه المعادلة من المرتبة الثانية لأن أكبر مرتبة لمشتقة الدالة y هي المرتبة الثانية نظراً لوجود y'' في المعادلة. وبالإمكان تحويل المعادلة إلى معادلتين آنيتين، كل معادلة هي من المرتبة الأولى وذلك بأخذ:

$$u = y'$$

وبالتالي فإن:

$$u' = y'' = g(x, y, u)$$

أي أن لدينا المعادلتين:

$$y' = u$$

$$u' = g(x, y, u)$$

وهما حالة خاصة من (12.1) حيث هنا:

$$f(x, y, u) = u$$

لاحظ أن حل معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية يتطلب شرطين ابتدائيين هما:

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = u_0$$

وفي هذه الحالة فإن المسألة تعتبر مسألة قيمة ابتدائية وهي النوع من المسائل الذي سندرسه هنا. أما النوع الثاني فهو ما يسمى بمسألة القيمة الحدية (boundary-value problem) وفيه تتحدد القيم:

$$y(x_0) = y_0, \; y(x_n) = y_n$$

أي النقطتين عند الحدين للفترة $[x_0, x_n]$.

مثال (13.1):

احسب y عند x=.1 و x=.2 باستعمال طريقة أويلر في حل المسألة الابتدائية:

$$y'' + y = 0, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

نعرف الدالة u بأنها:

$$y' = u$$

وبالتالي فإن:

$$u' = -y$$

أي أن:

$$y' = f(x, y, u) = u$$
$$u' = g(x, y, u) = -y$$

وعلى ذلك:

$$y(.1) = y(0) + (.1)(1) = 0.1$$
$$u(.1) = u(0) + (.1)(-y_0) = 1$$
$$y(.2) = y(.1) + (.1)(1) = 0.2$$
$$u(.2) = u(.1) + (.1)(-.1) = 0.99$$

لاحظ أن حل المسألة هو:

$$y = \sin(x)$$

أي أن القيم الصحيحة هي:

$$y(.1) = \sin(.1) = .0998$$
$$y(.2) = \sin(.2) = .1986$$

مثال (13.2):

استعمل طريقة أويلر المعدلة لحل المسألة السابقة.

$$\bar{u}(.1) = u(0) + (.1)(-y_0) = 1$$

$$y(.1) = y(0) + \frac{.1}{2}\left[u(0) + \bar{u}(.1)\right] = 0.1$$

$$u(.1) = u(0) + \frac{.1}{2}\left[-y(0) - y(.1)\right] = .995$$

$$\bar{u}(.2) = u(.1) + (.1)(-y(.1)) = .985$$

$$y(.2) = y(.1) + \frac{.1}{2}\left[u(.1) + \bar{u}(.2)\right] = .199$$

لاحظ هنا استعمال $\bar{u}$ كقيمة تنبؤية وليست هناك حاجة لحساب $\bar{y}$.

مثال (13.3):

أحسب قيمة y عند $x = .1$ من المعادلة

$$y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

بطريقة رانج كوتا.

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ u_0 = 1$$

$$k_1 = hu_0 = 0.1$$

$$\ell_1 = -hy_0 = -(.1)(0) = 0$$

$$k_2 = h(u_0 + \ell_1/2) = (.1)(1 + 0) = 0.1$$

$$\ell_2 = -h(y_0 + k_1/2) = -(.1)(0 + .05) = -.005$$

$$k_3 = h(u_0 + \ell_2/2) = (.1)(1 - .0025) = .09975$$

$$\ell_3 = -h(y_0 + k_2/2) = -(.1)(.1/2) = -.005$$

$$k_4 = h(u_0 + \ell_3) = (.1)(1 - .005) = .0995$$

$$\ell_4 = -h(y_0 + k_3) = -(.1)(.09975) = -.009975$$

$$y(.1) = y(0) + [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]/6 = .0998333$$

وهي قيمة قريبة جداً من الحل الصحيح:

$$y(.1) = \sin(.1) = .0998334$$

تمارين (6)

1- أحسب قيم u و v عند:

$$t = .1, .2, .3$$

من المعادلات الآتية:

$$u' = u - 4v$$
$$v' = -u + v$$

والشرطين الابتدائيين $u(0) = 1$ و $v(0) = 0$

(أ) بطريقة أويلر
(ب) بطريقة أويلر المعدلة
(جـ) بطريقة رانج كوتا
(د) بطريقة الفرق المتأخر

قارن الحلول مع الحل:

$$u = 0.5\,(e^{-t} + e^{3t})$$

$$v = 0.25\,(e^{-t} - e^{3t})$$

2 ـ بيّن أن المعادلتين في تمرين (1) يمكن وضعهما على النحو:

$$Y' = AY$$

حيث:

$$Y' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

ومن ذلك فإن طريقة أويلر تكتب على النحو:

$$Y_{i+1} = CY_i$$

أوجد المصفوفة C. كذلك أوجد المصفوفة C في حالة استعمال طريقة الفرق المتأخّر وطريقة شبه المنحرف.

3 ـ استعمل «أ» طريقة أويلر، «ب» طريقة أويلر المعدلة، «حـ» طريقة رانج كوتا.

لحل المعادلة التفاضلية (عند $t = .1$, $t = .2$).

$$y'' + t^2 y' + 3y = t$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

4 ـ أكتب برامج فرعية لحساب u_i, v_i عند x_i حيث i من 1 إلى n وذلك بحل المعادلتين:

$$u' = f(x, u, v), \quad u(x_0) = u_0$$

$$v' = g(x, u, v), \quad v(x_0) = v_0$$

أ) بطريقة أويلر. ب) بطريقة أويلر المعدلة. حـ) بطريقة رانج كوتا.

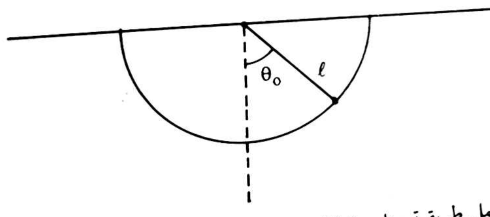
5 ـ أعد كتابة البرامج الفرعية في تمرين (4) لحل m معادلة تفاضلية مع m شرط ابتدائي.

6 ـ أكتب برنامجاً فرعياً لحل نظام من المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة شبه المنحرف. (لاحظ أن مثل هذا البرنامج يتطلب برنامجاً فرعياً آخر لايجاد معكوس مصفوفة. استعن بتمرين (2) في الحل).

7 ـ المعادلة التالية:

$$\theta'' + \frac{c}{m\ell}\theta' + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

تصف حركة البندول كما في الرسم التالي:



استعمل طريقة مناسبة لإيجاد $\theta(t)$ ابتداء من $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$, $\theta'(0) = 0$ حتى يتوقف البندول عن الحركة. افترض أن $\frac{c}{m\ell} = .3$, $\frac{g}{\ell} = 1$, استخدم $\Delta t = .1$

اختبار نموذجي (1)

الزمن: 1:30 (ساعة ونصف)

س (1) : أكمل ما يلي:

تعتبر طريقة .... ذات استقرار مشروط، أما طريقة .... فهي غير مستقرة على الاطلاق، بينما تعتبر طريقة .... مستقرة بدون شرط.

س (2) : استعمل طريقة أويلر المعدلة لتقدير y عند $x = .1$ من $y(0) = 1$ والمعادلة $y'y = 1$. (استخدم 4 خانات عشرية في الحساب).

س (3) : أكتب برنامجاً للمقارنة بين الحل الصحيح $y = e^{-x}$ للمعادلة $y' = -y$ والشرط $y(0) = 1$ والحل العددي بطريقة أويلر عند $x = 1$ بأخذ قيم مختلفة لمقدار الزيادة h بحيث:

$$h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$$

س (4) : (أ) استعمل طريقة رانج - كوتا لحساب y_2 علماً بأن:

$$y' = 4x^3, x_1 = 0, y_1 = 0, h = 0.2$$

(ب) لماذا تعطي طريقة رانج - كوتا قيم y_i مساوية للحل الصحيح عند حل المعادلة $y' = 4x^3$.

س (5) : أوجد مرتبة الخطأ الموضعي في طريقة شبه المنحرف.

الفصل الثامن

مسائل القيم الحدية

Boundary-Value Problems

8.1 مقدمة

مسائل القيم الحدية هي ذلك النوع من المسائل التي تتحدد فيه المعادلة التفاضلية وقيم المتغير y عند نقاط الحدود (boundary points). فمثلاً المعادلة:

$$y'' = f(x, y, y'), a < x < b \tag{1.1}$$

مع القيم الحدية:

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b \tag{1.2}$$

حيث y_b, y_a قيم معلومة. تعرف (أي المعادلة مع القيم الحدية) **بمسألة قيم حدية لنقطتين**.

والغرض من حل مسألة القيم الحدية عددياً هو إيجاد قيم تقريبية للمتغير y عند النقطة x_i حيث:

$$x_i = x_0 + ih, \quad x_0 = a$$

$$h = \frac{b - a}{n}$$

أي أن:

$$x_n = b$$

وبالتالي فإن عدد المجاهيل هو $n - 1$ قيمة، وهي:

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$$

حيث إن القيم الحدية تعتبر معلومة، وهي:

$$y_0 = y(x_0) = y_a$$

$$y_n = y(x_n) = y_b$$

8.2 طريقة التصويب Shooting method

تعتمد هذه الطريقة على تحويل مسألة القيم الحدية إلى مسألة قيم ابتدائية وذلك بإيجاد $y'(x_0)$ التي تحقق القيمة الحدية y_b.

مثال (2.1):
استعمل طريقة التصويب لحل المعادلة:

$$y'' + y' + y = -2x^2$$

مع الشرطين الحديين:

$$y(0) = 0,\ y(1) = 2$$

نجري أولاً التحويل التالي:

$$y' = u$$

$$u' = -(2x^2 + y + u)$$

لحل هاتين المعادلتين كمسألة قيم ابتدائية، تتوفر لدينا:

$$y_0 = 0$$

ولكن u_0 مجهولة. نحاول أولاً تقدير u_0 عشوائياً وليكن مثلاً:

المحاولة الأولى:

$$u_0 = 2$$

نستعمل في هذا المثال طريقة أويلر المعدلة أو أي طريقة أخرى مناسبة مع افتراض $h = 0.25$ لنحصل على:

$$\bar{u}_{i+1} = u_i + hg(x_i, y_i, u_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[u_i + \bar{u}_{i+1}\right]$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left[g(x_i, y_i, u_i) + g(x_{i+1}, y_{i+1}, \bar{u}_{i+1})\right]$$

حيث:

$$g(x, y, u) = -(2x^2 + y + u)$$

وبما أن:

$$h = 0.25,\ x_0 = 0,\ x_n = 1$$

فإن:

$$n = \frac{1}{.25} = 4$$

أي أننا نحتاج لحساب:

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

وبعدها نختبر قيمة y_4، فإذا كانت:

$$y_4 = y(1) = 2$$

فإن المحاولة الأولى قد نجحت، أي أن اختيارنا لقيمة u_0 المجهولة قد حققت المطلوب.

وبحساب هذه القيم فعلاً نتحصل على:

$$y_1 = .4375$$

$$y_2 = .7434$$

$$y_3 = .9168$$

$$y_4 = .9352 \neq 2$$

أي أن y_4 لا تساوي $y(1) = 2$، وبالتالي نحتاج إلى محاولة أخرى عشوائية.

المحاولة الثانية، ولتكن $u_0 = y'(0) = 6$

تعطي النتائج التالية:

$y_1 = 1.3125$

$y_2 = 2.2537$

$y_3 = 2.8332$

$y_4 = 3.0648$

أي أن: $y_4 \neq 2$

وبالتالي فإننا نحتاج إلى محاولة أخرى، إلا أن هذه المرة لن تكون محاولة عشوائية، ولكن نستعمل طريقة القاطع (أنظر الفصل الأول) للحصول على قيمة قريبة من القيمة الصحيحة. نلاحظ أن y_n (في هذه الحالة y_4) تعتمد على القيمة التي نختارها في البداية (أي y'_0). هذا يعني أن:

$$y_n = \phi(y'_0) \qquad (2.1)$$

أي أن y_n دالة تعتمد على y'_0. إذا افترضنا أن هذه الدالة خطية، أي:

$$y_n = m + sy'_0 = \phi(y'_0) \qquad (2.2)$$

فإن:

$$s = \frac{\phi(6) - \phi(2)}{6 - 2} = \frac{3.0648 - .9352}{4}$$

$$= .5324$$

$$m = \phi(6) - 6s$$

$$= 3.0648 - 6\,(.5324)$$

$$= 3.0648 - 3.1944$$

$$= -.1296$$

والآن لإيجاد قيمة y'_0 التي تجعل y_n تساوي 2، نجري العملية:

$$y'_0 = \frac{2 + .1296}{.5324} = \frac{2.1296}{.5324} = 4$$

باستعمال هذه القيمة في المحاولة الثالثة (أي $u_0 = 4$):

$y_1 = .875$

$y_2 = 1.5$

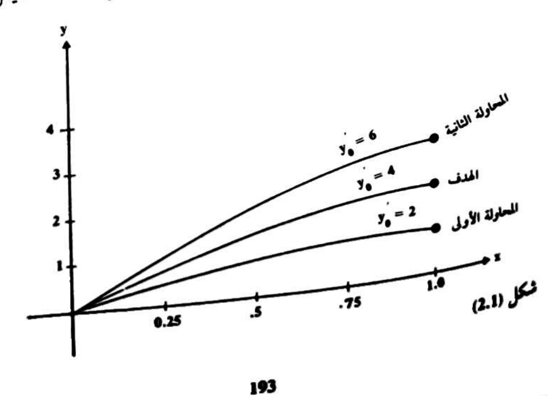
$y_3 = 1.875$

$y_4 = 2$

وبالتالي فإن هذا هو الحل الصحيح حيث إن y_4 تحقق القيمة الحدية المطلوبة.

ملاحظات:

(1) يوضح الشكل (2.1) لماذا سميت هذه الطريقة بطريقة التصويب، حيث يبين الرسم المنحنيات الثلاثة التي تم الحصول عليها بثلاث محاولات لقيمة y'_0. لاحظ أن y'_0 هو ميل المماس للمنحنى $y(x)$ عند النقطة x_0. هذا الميل يمكن



شكل (2.1)

اعتباره ميل فوهة المدفع (أو البندقية) في محاولة إصابة هدف على بعد كيلومتر واحد (مثلا)، أي أن $x_n = 1$ وعلى ارتفاع 2 كيلومتر (مثلاً) أي أن $y_n = 2$. باستعمال الميل $y_0' = 2$ فإن التصويب كان تحت الهدف وباستعمال ميل أعلى $y_0' = 6$ كان التصويب فوق الهدف، ولكن باستعمال الميل الواقع بينهما $y_0' = 4$ كان التصويب عند الهدف تماماً.

(2) لاحظ في المثال السابق أن ثلاث محاولات فقط كانت كافية لإيجاد الحل. بالإمكان تعميم هذه النتيجة على المعادلات الخطية، ولكن الأمر ليس صحيحاً إذا كانت المعادلة غير خطية، ولا بد من استبدال الشرط $y_n = y(x_n)$ بآخر تقريبي، أي نشرط أن $y_n \simeq y(x_n)$.

والخوارزمية التالية تلخص بتحديد أكثر طريقة التصويب:

1 ـ حدد المعطيات: الدالة g والقيم الحدية $y(x_0)$ و $y(x_n)$ ورقم التسامح ε والحد الأعلى لعدد الدورات التكرارية max وقيمتين α و β كتقريبين للقيمة المجهولة $y'(x_0)$.

2 ـ حل مسألة القيمة الابتدائية:

$$y'' = g(x, y, y')$$
$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = \alpha$$

وليكن الناتج عند x_n هو $y_{n\alpha}$. (لاحظ عدم تحديد الطريقة العددية).

3 ـ قارن بين $y(x_n)$ و $y_{n\alpha}$، إذا كانا قريبين في حدود ε، إطبع النتائج وتوقف.

4 ـ حل المسألة في الخطوة 2 ولكن مستعملاً $y'(x_0) = \beta$ وليكن الناتج عند x_n هو $y_{n\beta}$.

5 ـ قارن بين الحل الصحيح $y(x_n)$ و $y_{n\beta}$ بحيث إذا كانا قريبين في حدود ε اطبع الناتج وتوقف.

6 ـ أحسب قيمة جديدة للمجهول $y'(x_0)$ من طريقة القاطع، أي:

$$\gamma = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)}{(y_{n\beta} - y_{n\alpha})} (y(x_n) - y_{n\alpha}) \qquad (2.3)$$

7 ـ حل المسألة في الخطوة 2 مع استعمال $y'(x_0) = \gamma$ وليكن الناتج عند x_n هو $y_{n\gamma}$.

8 ـ قارن بين $y(x_n)$ والقيمة $y_{n\gamma}$. إذا كانت القيم متقاربة في حدود ε اطبع النتائج وتوقف.

9 ـ قم بالتغييرات التالية:

$$\alpha = \beta$$
$$\beta = \gamma$$

10 ـ إرجع إلى الخطوة (6) لحساب γ جديدة مع التأكد أن عدد الدورات لا يزيد عن العدد المحدد max.

مثال (2.2):

اكتب البرنامج الذي يقوم بتنفيذ طريقة التصويب لحل المسألة الحدية:

$$y'' + xy' + y^2 = 1$$
$$y(0) = 1, \; y(1) = 3$$

مع استعمال البرنامج الفرعي RKM الذي يقوم بحل مسألة القيم الابتدائية:

$$y' = u$$
$$u' = g(x, y, u)$$

حيث:

x_1, y_1, u_1 هي القيم الابتدائية.

```
C.....  SHOOTING METHOD........
        EXTERNAL F, G
        DIMENSION X (11), Y (11), U (11)
        WRITE (*,*)' ENTER X1,XN, H, Y1, YLAST,EPS,MAX,ALPHA,BETA'
        READ (*, *) X (1), XN, H, Y (1). YLAST, EPS, MAX.
      * ALPHA. BETA
        U (1) = ALPHA
        N = (XN - X (1))/ H + 1.5
        CALL RKM (X, Y, U, F, G, H, N)
        IF (ABS (YLAST - Y (N)). LE. EPS) GO TO 200
        YALPHA = Y (N)
C
        U (1) = BETA
        CALL RKM (X, Y, U, F, G, H, N)
        WRITE (*, *) BETA, (Y (I), I = 1, N)
        IF (ABS (YLAST - Y (N)). LE. EPS) GO TO 200
        YBETA = Y (N)
C
        DO 50 K = 1, MAX
        GAMMA = ALPHA + (BETA - ALPHA) * (YLAST - YALPHA)
      * / (YBETA - YALPHA)
        U (1) = GAMMA
        CALL RKM (X, Y, U, F, G, H, N)
        YGAMMA = Y (N)
        IF (ABS (YGAMMA - YLAST). LE. EPS) GO TO 100
        ALPHA = BETA
        BETA = GAMMA
        YALPHA = YBETA
        YBETA = YGAMMA
50      CONTINUE
100     WRITE (*, 10) GAMMA
10      FORMAT ('INITIAL DERIVATIVE =', F20.6)
        WRITE (*, 20) K
20      FORMAT ('NO. OF ITERATIONS =', I3)
        DO 30 I = 1, N
30      WRITE (*, 40) I, Y (I)
40      FORMAT ('Y (', I2, ') =', E12.6)
200     STOP
        END
C
        FUNCTION G (X, Y, U)
        G = 1 - X * U - Y * Y
        RETURN
        END
```



```
C
        FUNCTION F (X, Y, U)
        F = U
        RETURN
        END
```

تمارين (1)

1 ـ «أ» بيِّن أن مسألة القيم الحدية في المثال (2.1) لها الحل:

$$y(x) = 4x - 2x^2$$

«ب» علّل لماذا أعطت طريقة أويلر المعدلة في هذا المثال قيم y_i مساوية للحل الصحيح؟

«حـ» أعد الحسابات في المثال نفسه مستعملاً طريقة أويلر بدلاً من الطريقة المعدلة. ماذا تلاحظ؟

«د» استعمل طريقة نقطة المنتصف وقارن بالحل الصحيح. احسب y_1 ، u_1 من طريقة أويلر.

2 ـ إذا كانت المعادلة التي تحدد مسار قذيفة $y(x)$ هي:

$$y'' + y'^2 + y = 7$$

حيث y تمثل الارتفاع و x تمثّل البعد بالكيلومتر، استعمل طريقة التصويب لإيجاد الميل عند نقطة الانطلاق $y'(0)$ لإصابة هدف على بعد 2 كيلومتر وارتفاع 2 كيلومتر، وذلك:

«أ» باستعمال الحساب اليدوي في 3 محاولات بأخذ $h = 0.5$ في طريقة أويلر.

«ب» باستعمال الحاسوب في حل المسألة مستخدماً طريقة رانج كوتا واعتبار $h = 0.1$.

3 ـ المطلوب كتابة برنامج فرعي لطريقة التصويب لحل المسألة الحدية:

$$y'' = f(x, y, y'),\ y(a) = y_a,\ y(b) = y_b$$

علماً بأن $y'(a)$ مجهولة ولكن تقع في الفترة (α, β) حيث β, α من المعطيات. لاحظ أن في هذه الحالة يمكن استعمال طريقة التصويب مع طريقة الوضع الخاطىء أو طريقة التنصيف لضمان التقارب.

«أ» أكتب البرنامج مستعملاً طريقة التنصيف.

«ب» أكتب البرنامج مستعملاً طريقة الوضع الخاطىء.

4 ـ عند حل مسألة القيم الحدية الخطية:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x)$$
$$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b$$

حيث p، q، r دوال معلومة في x، نحصل على الحل $y_\alpha(x)$ بطريقة التصويب باستعمال $y'(a) = \alpha$، ونتحصل على الحل $y_\beta(x)$ باستعمال $y'(a) = \beta$. اثبت أن الحل الصحيح هو:

$$y(x) = \left[\frac{y_b - y_\beta(b)}{y_\alpha(b) - y_\beta(b)}\right] y_\alpha(x) + \left[\frac{y_\alpha(b) - y_b}{y_\alpha(b) - y_\beta(b)}\right] y_\beta(x)$$

5 ـ استعمل صيغة الحل في تمرين (4) لحل مسألة القيم الحدية في مثال (2.1). هل يمكن استعمال هذه الصيغة لحل المسألة في تمرين (2)؟

6 ـ أكتب برنامجاً لحل مسألة القيم الحدية الخطية في تمرين (4) باستعمال الصيغة المذكورة في التمرين.

8.3 طريقة الفروق المتنهية

في هذه الطريقة، نقوم بإيجاد حل تقريبي لمسألة القيم الحدية:

$$y'' = f(x, y, y')$$
$$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b \qquad (3.1)$$

وذلك باستخدام الصيغ التقريبية للمشتقات y'', y' بطريقة الفروق المتهية **(انظر الفصل السادس)**. فمثلاً، إذا استعملنا الصيغ:

$$y_i' \simeq \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} \tag{3.2}$$

$$y_i'' \simeq \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} \tag{3.3}$$

وهما صيغتان من المرتبة الثانية (أي $O(h^2)$) فإننا نحصل من (3.1) على معادلة الفروق:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2 f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right) = 0 \tag{3.4}$$

هذه المعادلة تتطلب حلاً تحت الشرطين:

$$y_0 = y_a, \; y_n = y_b$$

حيث n هي عدد التقسيمات للفترة $[a, b]$ وحيث h هي طول كل تقسيمة، أي:

$$h = \frac{b-a}{n}, \; n = \frac{b-a}{h} \tag{3.5}$$

إذا كانت الدالة f خطية على النحو:

$$f(x, y, y') = -p(x)\,y' - q(x)y + r(x) \tag{3.6}$$

فإن المعادلة المطلوب حلها هي:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{3.7}$$

وباستعمال الرموز:

$$r_i = r(x_i),\; q_i = q(x_i),\; p_i = p(x_i) \tag{3.8}$$

والتعويض في (2.4) نحصل على:

$$A_i y_{i-1} + B_i y_i + C_i y_{i+1} = D_i \tag{3.9}$$

حيث:

$$\left\{\begin{aligned} A_i &= 1 - p_i h/2 \\ B_i &= -2 + h^2 q_i \\ C_i &= 1 + p_i h/2 \\ D_i &= h^2 r_i \end{aligned}\right. \tag{3.10}$$

بأخذ قيم i بحيث:

$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$

في (3.9) نحصل على المعادلات الخطية الآتية:

$$B_1 y_1 + C_1 y_2 = D_1 - A_1 y_0$$

$$A_2 y_1 + B_2 y_2 + C_2 y_3 = D_2$$

$$A_3 y_2 + B_3 y_3 + C_3 y_4 = D_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{n-1} y_{n-2} + B_{n-1} y_{n-1} = D_{n-1} - C_{n-1} y_n$$

وهذه المعادلات يمكن كتابتها بطريقة المصفوفات كالآتي:

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{n-1} & & B_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 - A_1 y_0 \\ D_2 \\ D_3 \\ \cdots \\ D_{n-1} - C_{n-1} y_n \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

لاحظ أن المصفوفة في هذا النظام الخطي تتكون من القطر B_i وتحت القطر A_i وفوق القطر C_i وبقية العناصر في المصفوفة كلها أصفار. تسمى مثل هذه المصفوفة مصفوفة ذات الأقطار الثلاثة Tridiagonal matrix. بالإمكان حل النظام الخطي (3.11) بطريقة جاوس مثلاً مع مراعاة أن وجود الأصفار في المصفوفة القطرية الثلاثية يوفر الكثير من الحسابات عند تحويلها إلى مصفوفة مثلثية.

مثال (3.1):

حل المسألة الحدية:

$$y'' + y = 0, \; y(0) = 0, \; y(1) = 1$$

باستعمال طريقة الفروق المنتهية. استعمل h = .25

نلاحظ في هذا المثال أن $f(x, y, y') = -y$

من (3.4) نحصل على:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2(-y_i) = 0$$

$$y_{i+1} + (-2 + h^2)\, y_i + y_{i+1} = 0$$

وبما أن h = .25 فإن $n = \frac{1-0}{.25} = 4$

وبالتالي يكون عدد المجاهيل 3 هي y_1، y_2، y_3. ويكون النظام الخطي (3.11) على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} -1.9375 & 1 & 0 \\ 1 & -1.9375 & 1 \\ 0 & 1 & -1.9375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وعند الحل، نحصل على:

$y_1 = .2943$

$y_2 = .5702$

$y_3 = .8104$

ملاحظات:

(1) الحل الصحيح للمسألة في المثال السابق هو:

$y(x) = \sin(x)/\sin(1)$

أي أن:

$y(.25) = .2940$

$y(.5) = .5698$

$y(.75) = .8101$

وبالمقارنة بالحل العددي في طريقة الفروق المحدودة نجد أن الخطأ لا يتعدّى الخانة العشرية الرابعة بعد الفاصلة.

(2) لو كانت المعادلة (3.1) غير خطية لنتج عنها نظام من المعادلات غير خطي.

(3) لو فرضنا h = 0.1 لأصبح النظام الخطي ذا تسعة مجاهيل. وهو عدد كبير بالنسبة للحل اليدوي، ويصبح من الضروري أن يستعمل الحاسوب لحل المسألة.

مثال (3.2):

أكتب برنامجاً لحل المسألة الحدية:

$$y'' + xy' + x^2y = \sin(x)$$

$$Y(0) = 0, \; y(1) = 2$$

بطريقة الفروق المنتهية مستعملاً البرنامج الفرعي:

SUBROUTINE TRID (A, B, C, M, E, Y)

الذي يوجد الحل Y للنظام الخطي ذي الأقطار الثلاثة C, B, A والمتكون من M مجهول. العمود E هو الطرف الأيمن من النظام.

```
C..... FINITE DIFFERENCE METHOD.....
      DIMENSION A (100), B(100), C(100), D(100),Y(100)
      P(X) = X
      Q(X) = X * X
      R(X) = SIN (X)
      READ (*, *) H, XO, XN, YA, YB
      M = (XN- XO)/ H - .5
      DO 10 I = 1, M
      X = XO + I * H
      A(I) = 1 - P(X) * H/2
      B(I) = - 2 + H * H * Q (X)
      C(I) = 1 + P(X) * H/2
10    D(I) = H * H * R(X)
      D(1) = D(1) - A(1) * YA
      D(M) = D(M) - C(M) * YB
      CALL TRID (A, B, C, M, D, Y)
      DO 20 I = 1, M
20    WRITE (*, *) I, Y(I)
30    FORMAT (' Y(', I2, ')', E20.6)
      STOP
      END
      SUBROUTINE TRID (A, B, C, M, E, Y)
      DIMENSION A(M), B(M), C(M), E(M), Y(M)
      DO 10 I = 2, M
      CONST = A(I)/ B(I - 1)
      B(I) = B(I) - CONST* C(I - 1)
10    E(I) = E(I) - CONST* E(I - 1)
      Y(M) = E(M)/ B(M)
      DO 20 J = 1, M- 1
      K = M - J
20    Y(K) = (E(K) - C(K) * Y (K + 1))/ B(K)
      RETURN
      END
```

مثال (3.3):

أوجد $y(1/3)$ و $y(2/3)$ من المسألة الحدية:

$$y'' + y' = 2(1+x)$$

$$y(0) = 0, \ y'(1) = 2$$

بأخذ $h = \frac{1}{3}$ وتحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة فروق نحصل على:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \frac{h}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) = 2(1 + x_i)\, h^2$$

عند $x_1 = \frac{1}{3}$

$$y_0 - 2y_1 + y_2 + \frac{1}{6}(y_2 - y_0) = 2\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$-12\, y_1 + 7y_2 = 16/9$$

وعند $x_2 = \frac{2}{3}$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 + \frac{1}{6}(y_3 - y_1) = 2\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$5y_1 - 12y_2 + 7y_3 = 20/9$$

لاحظ أن y_3 وهي قيمة y عند $x = 1$ مجهولة لأن القيمة المعطاة عند الحد الأيمن هي y' وليست y. لحل هذه المشكلة يمكن أن نستعمل التقريب:

$$y_3' \simeq \frac{y_3 - y_2}{h}$$

أي الفرق المتأخر من المرتبة الأولى. إذن:

$$\frac{y_3 - y_2}{h} \simeq 2$$

أو:

$$y_3 - y_2 = 2\left(\frac{1}{3}\right)$$

وبالتالي فإن النظام الخطي هو:

$$\begin{bmatrix} -12 & 7 & 0 \\ 5 & -12 & 7 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 18 \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام نحصل على:

$y_1 = .1515$

$y_2 = .4343$

$y_3 = 1.0818$

ملاحظة:

الحل الصحيح في المثال السابق هو: $y = x^2$

أي أن:

$y(1/3) = 1/9 = 0.1111$

$y(2/3) = 4/9 = .4444$

$y(1) = 1$

الخطأ الموجود في الحل العـددي بطريقـة الفروق المنتهيـة (المركـزية) في هـذا المثال هو ناتج كلية عن تقريب $y'(1)$ بالفرق المتأخر من المرتبة الأولى. ذلك لأن الخطأ الناتج عن تقريب y', y'' بالفروق المركزية في هذا المثال هو صفر لأن:

$$y = x^2,\ y' = 2x,\ y'' = 2,\ y''' = 0$$

والمعروف أن الخطأ في تقريب y' باستعمال الفرق المـركزي يتنـاسب مع y'''. (انظر الفصل السادس). وعلى ذلـك نستنتج أن الأخـطاء في القيم التي تحصلنا عليها بالحل العددي هي ناتجة في هذا المثال عن تقريب $y'(1)$ فقط.

مثال (3.4):

استعمل $h = .2$ لحل المسألة الحدية:

$$y'' + 10y' + y = 1$$

$$y(0) = 1,\ y(1) = 2$$

بطريقة الفروق المركزية (المتنهية).

نلاحظ هنا أن:

$p(x) = 10$

$q(x) = 1$

$r(x) = 1$

وبتطبيق (3.10) نحصل على النظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} -2.04 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2.04 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2.04 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .04 \\ .04 \\ .04 \\ -3.96 \end{bmatrix}$$

ولكن مشكلة هذا النظام الخطي أن قيمة y_0 لم نستعملها لإيجاده، أي أنـه لا يعتمد على قيمة y_0، وهذا يعني وجود تناقض مـع الحل الصحيـح الذي يعتمـد على قيمة $y(0)$. لاحظ أن سبب المشكلة هو كون:

$A_1 = 0$

أي عندما:

$h = 2/p(x_i)$

وبالتالي يجب اختيار h بحيث نبقي على القيم الحدية في النظام الخطي.

تمرينات (2)

1- أوجد قيم y عند $x = .5, 1, 1.5$ بطريقة التصويب من المسألة الحدية:

$$2y'' - xy' + y = 4 - x^2$$

$$y(0) = 0,\ y(2) = 12$$

2- في تمرين (1) الحل الصحيح هو:

$$y = x^2 + 4x$$

قارن بين الحل العددي بطريقة الفروق المركزية وهذا الحل. لماذا يتساوى الحلان في هذه المسألة؟

3 - إذا كانت $h = .1$ في تمرين (1)، فكم عدد قيم y المطلوب إيجادها؟ استعمل برنامجاً لحل المسألة على الحاسب الآلي بهذه القيمة لـ h.

4 - ما هي قيم h المحظور استعمالها في حل المسائل التالية بطريقة الفروق المركزية حتى لا تتلاشى القيم الحدية في الحل العددي.

(أ) $2y'' + 100y' - y = 0$

$y(0) = 1, y(1) = 2$

(ب) $y'' - 20\,xy' + 2y = 1$

$y(0) = 2, y(2) = 5$

5 - حل تمرين (1) مع تغيير القيمة الحدية $y(0) = 0$ إلى الشرط الحدي:

$y'(0) = 4$

(أ) استعمل الفرق المتقدم من المرتبة الأولى لتقريب هذا الشرط. قارن مع الحل في تمرين (1) والحل الصحيح في تمرين (2) مع التعليق على هذه النتائج.

(ب) أعد فقرة (أ) ولكن باستعمال تقريب الفرق المتقدم من المرتبة الثانية.

الفصل التاسع

مسائل القيم الذاتية
Eigen-value Problems

9.1 مقدمة

لو حاولنا إيجاد حل عددي للمسألة الحدية:

$$y'' + y = 0, y(0) = y(1) = 0 \qquad (1.1)$$

باستعمال طريقة الفروق المنتهية مع أخذ $h = \frac{1}{4}$، فإننا نحصل على النظام الخطي التالي:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \frac{1}{16}\, y_i = 0$$

$$16\, y_{i-1} - 31y_i + 16y_{i+1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -31 & 16 & 0 \\ 16 & -31 & 16 \\ 0 & 16 & -31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

يدعى مثل هذا النظام بأنه متجانس **homogeneous** لأن الطرف الأيمن كله أصفار. والمعروف أن مثل هذا النظام ليس له إلاّ الحل الصفري (أي قيم y_i كلها أصفار) إلا إذا كانت محددة المصفوفة تساوي صفراً.

فعندها يمكن أن يوجد حل غير الحل الصفري. في هذا المثال واضح أن المحددة ليست صفراً، وعلى ذلك فإن الحل الوحيد هو:

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0 \qquad (1.2)$$

لو غيرنا في المسألة (1.1) على النحو:

$$y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y(1) = 0 \qquad (1.3)$$

فإننا نحصل على:

$$16\, y_{i+1} + (-32 + \lambda)\, y_i + 16\, y_{i+1} = 0$$

أي أن:

$$\begin{bmatrix} -32+\lambda & 16 & 0 \\ 16 & -32+\lambda & 16 \\ 0 & 16 & -32+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لكي يكون لهذا النظام حل غير الحل الصفري، نوجد قيم λ بحيث:

$$\det \begin{bmatrix} -32+\lambda & 16 & 0 \\ 16 & -32+\lambda & 16 \\ 0 & 16 & -32+\lambda \end{bmatrix} = 0$$

أي:

$$(-32+\lambda) \begin{bmatrix} -32+\lambda & 16 \\ 16 & -32+\lambda \end{bmatrix} - 16 \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 16 & -32+\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-32+\lambda)\,[(-32+\lambda)^2 - 16^2 - 16^2] = 0$$

$$(-32+\lambda)\,[(-32+\lambda-16\sqrt{2})(-32+\lambda+16\sqrt{2})] = 0$$

أي أن القيم الممكنة للحصول على حل غير صفري هي:

$$\lambda_1 = 32 - 16\sqrt{2} = 9.37$$

$$\lambda_2 = 32$$

$$\lambda_3 = 32 + 16\sqrt{2} = 54.6$$

لاحظ أن الحل الصحيح للمسألة (1.3) هو:

$$y = c \sin \sqrt{\lambda}\, x$$

حيث c مقدار ثابت من القيمة الحدية عند x = 1 نحصل على:

$$\sin \sqrt{\lambda} = 0$$

أي:

$$\sqrt{\lambda} = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

أو:

$$\lambda = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots$$

نقارن الآن بين هذه القيم الصحيحة وقيم λ التي تحصلنا عليها من الحل العددي، فنرى أن:

$$\lambda_1 = 9.37 \approx \pi^2 = 9.86$$

$$\lambda_2 = 32 \approx 4\pi^2 = 39.5$$

$$\lambda_3 = 54.6 \approx 9\pi^2 = 88.8$$

واضح أن λ الصحيحة لها ما لا نهاية من القيم بينما لدينا هنا 3 قيم تقريبية فقط. ولكن لو أخذنا قيماً أصغر للخطوة h لتحصلنا على قيم أكثر وفي الوقت نفسه أقرب للحل الصحيح.

9.2 القيم الذاتية للمعادلات التفاضلية

القيم الذاتية Eigenvalues للمعادلة التفاضلية:

$$p(x)\,y'' + q(x)\,y' + r(x)\,y = \lambda y \qquad (2.1)$$

$$y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

هي جميع قيم λ التي تعطي لهذه المسألة الحدية حلاً غير الحل الصفري. وتسمى مسألة إيجاد قيم λ بمسألة القيم الذاتية (Eigen-value problem).

إذا استعملنا طريقة الفروق المركزية لحل المسألة (2.1) فإننا نحصل على النظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

أو:

$$AY = \lambda Y \qquad (2.3)$$

أي:

$$(A - \lambda I)\,Y = 0 \qquad (2.4)$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة. ونظراً لأن هذا النظام الخطي متجانس، فإن الشرط:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad (2.5)$$

ضروري لوجود حل غير صفري، لاحظ أن الدالة:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) \qquad (2.6)$$

هي متعددة الحدود من الدرجة n إذا كانت المصفوفة A ذات أبعاد **n × n**. وبالتالي فإن جذور الدالة $f(\lambda)$ وعددها n هي القيم الذاتية التقريبية للمعادلة التفاضلية (2.1)، مع ملاحظة أن القيم الصحيحة قد يكون عددها ما لا نهاية. وأن القيم الذاتية من الممكن أن تكون أعداداً مركبة (ذات جزء حقيقي وجزء تخيلي).

مثال (2.1):
أوجد 3 قيم تقريبية للقيم الذاتية للمسألة:

$$y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y(1) = 0$$

نلاحظ أولاً أن هذه المعادلة يجب كتابتها على الشكل (2.1) أي:

$$-\,y'' = \lambda y$$

أي أن:

$$p(x) = -1,\ q(x) = r(x) = 0$$

بأخذ $h = \frac{1}{4}$ فإن عدد المجاهيل يصبح 3 وبالتالي هناك 3 قيم ذاتية يمكن الحصول عليها بطريقة الفروق المركزية كما سبق شرحه وهي:

$$\lambda_1 = 9.37,\ \lambda_2 = 32,\ \lambda_3 = 54.6$$

مثال (2.2):
أوجد الحل في المثال (2.1) المناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 32$.

باستعمال $h = \frac{1}{4}$ و $\lambda = 32$ في طريقة الفروق المركزية نحصل على:

أي:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \frac{32}{16}\,y_i = 0$$

$$y_{i-1} + y_{i+1} = 0$$

أي

$$y_0 + y_2 = 0 \qquad i = 1$$

$$y_1 + y_3 = 0 \qquad i = 2$$

$$y_2 + y_4 = 0 \qquad i = 3$$

وبما أن القيم الحدية: $y_0 = y_4 = 0$

فإن الحل هو: $y_2 = 0$

$$y_1 = -y_3 = c$$

حيث c مقدار ثابت، أي أن متجه الحل هو:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

لاحظ أن هذا الحل يمثل ما لا نهاية من الحلول لأن c قيمة غير محددة. ويسمى متجه الحل المناظر لقيمة ذاتية في المعادلة بأنه متجه ذاتي (Eigen-vector). أي أن اختيار $h = \frac{1}{4}$ في المثال السابق أدى إلى الحصول على 3 قيم تقريبية للقيم الذاتية يقابلها 3 متجهات ذاتية كتقريب للمتجهات الذاتية الصحيحة، أو على الأصح الدوال الذاتية الصحيحة.

9.3 القيم الذاتية للمصفوفات

القيم الذاتية للمصفوفة A هي جميع قيم λ التي تحقق:

$$AY = \lambda Y$$

حيث Y متجه غير صفري. أي أن النظام الخطي:

$$BY = (A - \lambda I)\,Y = 0$$

له حلول غير الحل الصفري. وبما أن هذا النظام متجانس، فإن ذلك يعني:

$$\det(B) = \det(A - \lambda I) = 0$$

وبتعريف الدالة f بأنها: $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

فإن إيجاد القيم الذاتية للمصفوفة A يعني إيجاد جذور الدالة f وتسمى متعددة الحدود الذاتية للمصفوفة A، حيث إن f هي دالة متعددة الحدود من الدرجة n عندما تكون A مصفوفة مربعة ذات n صف و n عمود، مع ملاحظة أن الجذور قد لا تكون أرقاماً حقيقية بل مركبة أحياناً (complex)، إلاّ إذا كانت المصفوفة متماثلة (Symmetric) أي ($A_{ij} = A_{ji}$) ففي هذه الحالة يمكننا اثبات أن كل القيم الذاتية حقيقية

مثال (3.1): المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

لها متعددة الحدود الذاتية:

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 10-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1 - \lambda)(3 - \lambda)(10 - \lambda)$$

وبالتالي فإن القيم الذاتية هي التي تحقق $f(\lambda) = 0$، أي:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 10$$

المتجه الذاتي الذي يقابل λ_1 نحصل عليه من:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$y_3 = 0,\ y_2 = 0,\ y_1 = c_1$$

حيث c_1 مقدار ثابت غير محدد. والمتجه الذي يقابل λ_2 هو حل النظام:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$y_3 = 0,$$

$$-2y_1 + 2y_2 = 0$$

$y_1 = y_2 = c_2 =$ مقدار ثابت

والمتجه الثالث الذي يقابل λ_3 هو حل النظام:

$$\begin{bmatrix} -9 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي أن بوضع $y_3 = c_3$ حيث c_3 مقدار غير محدد، نحصل على:

$$-7y_2 + 5y_3 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{5}{7}\ y_3 = \frac{5}{7}\ c_3$$

$$-9y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{4}{9}\ y_3 + \frac{2}{9}\ y_2$$

$$y_1 = \frac{4}{9}\ c_3 + \frac{2}{9} \times \frac{5}{7}\ c_3 = \frac{38}{63}\ c_3$$

وبالتالي فإن المتجهات الذاتية الثلاثة هي:

$$Y_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y_2 = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y_3 = c_3 \begin{bmatrix} 38/63 \\ 5/7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظات :

(1) المثال السابق يوضح أن القيم الذاتية لمصفوفة مثلثية كالمصفوفة **A** في هذا المثال هي نفسها العناصر القطرية.

(2) المتجهات الذاتية لا تتحدد مقداراً ولكن تتحدد اتجاهاً فقط.

مثال (3.2) :

المطلوب كتابة برنامج لإيجاد القيم الذاتية للمصفوفة A المتكونة من N صف و N عمود وذلك بإيجاد جذور متعددة الحدود الذاتية، مع افتراض توفر برنامج فرعي لحساب محددة أي مصفوفة، وهو :

SUBROUTINE DET (A, N, D)

حيث D هي محددة المصفوفة A من نوع N×N. بالإمكان افتراض توفر أيضاً برنامج فرعي.

SUBROUTINE SECANT (X0, X1, F, R, N)

الذي يحسب جميع جذور الدالة F في المتجه R باستعمال القيم الابتدائية X1, X0، وذلك بطريقة القاطع. وقد فضّلنا هذه الطريقة على طريقة نيوتن لنتجنب حساب المشتقة الأولى في طريقة نيوتن لأن ذلك ليس سهلاً بالنسبة للدالة :

$$F(x) = \det(A - xI)$$

```
      EXTERNAL F
      DIMENSION A (10, 10), R(10), X0(10), X1(10)
      READ (*, *) N
5     DO 10 X = 1, N
10    READ (*, *) X0 (I), X1 (I)
      DO 20 I = 1, N
20    READ (*, *) (A(I, J), J = 1, N)
      CALL SECANT (X0, X1, F, R, N)
      WRITE (*, *) (R(I), I = 1, N)
      STOP
      END
      FUNCTION F(X, A, N)
```

```
      DIMENSION A(N, N)
      DO 10 I = 1, N
10    A(I, I) = A(I, I) - X
      CALL DET (A, N, F)
      RETURN
      END
```

ملاحظات:

(1) قد لا يؤدي البرنامج السابق المطلوب، إذ إن طريقة القاطع ليست مضمونة التقارب.

(2) قد يتطلب البرنامج وقتاً طويلاً عند التنفيذ نظراً لأن حساب المحددة عملية تستغرق زمناً طويلاً نسبياً.

(3) لا يؤدي البرنامج إلى حساب القيم الذاتية المركبة (complex).

9.4 طريقة القوى Power Method

تستعمل هذه الطريقة التكرارية لحساب أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة. وتتلخص في الخطوات التالية:

1 - إبدأ بمتجه ابتدائي (غير صفري) : U_0.

2 - أحسب α_0 أكبر عنصر من حيث القيمة المطلقة في U_0.

3 - أحسب المتجه $V_0 = U_0/\alpha_0$.

4 - لجميع قيم $i = 1, 2, 3, \ldots$ أحسب:

$$U_i = AV_{i-1}$$

$$V_i = U_i/\alpha_i$$

حيث α_i هي أكبر عنصر من حيث القيمة المطلقة في U_i.

توقف في حالة أن α_i تتقارب من قيمة محددة أي عندما $|\alpha_i - \alpha_{i-1}| < \epsilon$

فإن القيمة هي أكبر قيمة ذاتية (من حيث القيمة المطلقة) للمصفوفة A. وفي الوقت نفسه V_1 تتقارب من المتجه الذاتي المقابل لهذه القيمة المطلقة.

مثال (4.1):

استعمل طريقة القوى لإيجاد أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ابتداءً من المتجه:

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة الأولى هي حساب أكبر عنصر في U_0، وهو $\alpha_0 = 1$ وبالتالي فإن $U_0 = V_0$ و:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\alpha_1 = 8$$

و:

$$V_1 = \frac{1}{\alpha_1} U_1 = \begin{bmatrix} .875 \\ 1 \\ .875 \end{bmatrix}$$

و:

$$U_2 = AV_1 = \begin{bmatrix} 6.875 \\ 7.375 \\ 6.125 \end{bmatrix}$$

إذن :

$$\alpha_2 = 7.375$$

$$V_2 = \frac{1}{\alpha_2}\ U_2 = \begin{bmatrix} .9322 \\ 1 \\ .8305 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = AV_2 = \begin{bmatrix} 6.254 \\ 7.1525 \\ 5.813 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = 7.1525$$

أي :

$$V_3 = \frac{1}{\alpha_3}\ U_3 = \begin{bmatrix} .8744 \\ 1 \\ .8127 \end{bmatrix}$$

$$U_4 = AV_3 = \begin{bmatrix} 6.1252 \\ 7.0635 \\ 5.6889 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_4 = 7.0635$$

$$V_4 = \frac{1}{\alpha_4}\ U_4 = \begin{bmatrix} .8672 \\ 1 \\ .8052 \end{bmatrix}$$

لو نستمر في هذه العملية التكرارية فإن α_i ستؤول إلى القيمة 7، وتؤول V_i إلى المتجه الذاتي المناظر لهذه القيمة، أي:

$$\alpha_i \to 7$$

$$V_i \to \begin{bmatrix} .8666 \\ 1 \\ .8 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

يوصف المتجه الذاتي الذي يكون أكبر عنصر فيه هو الواحد الصحيح بأنه **متجه ذاتي قياسي**. لاحظ أن المتجه الذاتي يساوي المتجه الذاتي القياسي مضروبا في مقدار ثابت.

مبرهنة:

إذا كان للمصفوفة A قيم ذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ بحيث λ_1 هي أكبر من حيث القيمة المطلقة من باقي القيم الذاتية (ولا تساوي واحدة منها) فإن α_i في طريقة القوى تؤول إلى λ_1.

مثال (4.2):

استعمل طريقة القوى في كتابة برنامج فرعي لحساب أكبر قيمة ذاتية لمصفوفة A من نوع N × N بحيث لا يزيد عدد الدورات عن MAX وتعتبر α_i هي القيمة التقريبية للقيمة الذاتية الكبرى عندما:

$$|\alpha_{i+1} - \alpha_i| < EPS$$

اعتبر أن EIGEN هو متجه ذاتي (ابتدائي عند الادخال ونهائي عند الإخراج).

```
      SUBROUTINE POWER (A, N, EIGEN, ALPHA, MAX, EPS, ITE)
      DIMENSION A (N, N), ELGEN (N), TEMP (N)
      OLD = 0
      DO 100 ITE = 1, MAX
      ALPHA = 0
      DO 10 J = 1, N
      IF(ABS (EIGEN (J)). GT. ALPHA) ALPHA = EIGEN(J)
10    CONTINUE
      DO 20 J = 1, N
20    EIGEN (J)= EIGEN (J)/ ALPHA
      IF (ABS(ALPHA-OLD). LT. EPS) RETURN
      DO 40 I = 1, N
```

```
      TEMP (I) = 0
      DO 40 J = 1, N
40    TEMP(I) = TEMP(I) + A(I, J) * EIGEN (J)
      DO 50 K = 1, N
50    EIGEN (K) = TEMP (K)
100   OLD = ALPHA
      RETURN
      END
```

للحصول على تقريب للقيم الذاتية λ لمصفوفة A، يمكن استعمال مبرهنة **جرشغورن (Gerschgorin)**، ومفادها أن λ تقع في إحدى الفترات التالية:

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

حيث i لها القيم 1، 2، ....، n، (لاحظ أن هذه الفترات تعتبر دوائر إذا كانت λ قيمة مركبة). وإذا كانت إحدى هذه الفترات (أو الدوائر) غير متصلة بالفترات الأخرى، فإنها لا بدّ أن تحتوي على قيمة ذاتية.

مثال (4.3): المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

مصفوفة متماثلة وبالتالي فإن قيمها الذاتية حقيقية والفترات التي تحتوي على هذه القيم هي:

$$|\lambda - 3| \leq 1$$

$$|\lambda - 2| \leq 2$$

$$|\lambda + 4| \leq 1$$

لاحظ أن الفترة الثالثة غير متصلة بالفترتين الأخريين وبالتالي فهي تحتوي على قيمة ذاتية، أما الفترة الثانية فهي تحتوي على الفترة الأولى وبالتالي فهي تحتوي على قيمتين ذاتيتين.

تمارين (1)

1- هل يوجد حل غير صفري للمسألة الحدية:

$$y'' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

2- أوجد قيماً تقريبية للقيم الذاتية للمسألة:

$$y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y(1) = 0$$

باستعمال الفروق المركزية مع أخذ $h = \frac{1}{3}$. أوجد أيضاً المتجهات الذاتية المناظرة لهذه القيم.

3- أعد حل تمرين (2) مستبدلاً الشرط الحدي $y(0) = 0$ بالشرط:

$$y'(0) = 0$$

مع إمكانية تقريب هذه المشتقة بالفرق المتقدم. قارن مع الحل الصحيح.

4- أكتب البرنامج الفرعي:

SUBROUTINE EIGEN (P, Q, R, N, ALAMDA, X0, X1)

الذي يوجد القيم الذاتية التقريبية ALAMDA وعددها N للمسألة الحدية الذاتية:

$$PY'' + QY' + RY = \lambda Y$$
$$Y(0) = 0,\ Y(1) = 0$$

وذلك بحل المعادلة الذاتية بطريقة القاطع مع معلومية قيمتين تقريبيتين للقيمة الذاتية ALAMDA وهما X1, X0، ومعلومية الدوال R, Q, P.

5- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

وذلك بطريقة حل المعادلة الذاتية.

6 - أوجد أكبر قيمة ذاتية والمتجه الذاتي المناظر لها في المصفوفة A في تمرين (5) بطريقة القوى.

7 - (أ) أثبت أن λ^2 هي قيمة ذاتية للمصفوفة A^2 (أي $A * A$) إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A.

(ب) أثبت أن المتجهات الذاتية للمصفوفة A هي نفسها المتجهات الذاتية للمصفوفة A^2.

8 - أثبت أن $\frac{1}{\lambda}$ هي قيمة ذاتية للمعكوس A^{-1} إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A. أيضاً أثبت أن المتجه الذاتي للمصفوفة A هو نفسه للمصفوفة A^{-1}.

9 - إذا كانت λ_i قيمة ذاتية للمصفوفة A، أثبت أن $p_i = 1/(\lambda_i - q)$ هي قيمة ذاتية للمصفوفة $(A - qI)^{-1}$ حيث q قيمة ثابتة.

10 - طريقة القوى للمعكوس تعتمد على إجراء طريقة الأس على المصفوفة $(A - qI)^{-1}$ بدلاً من المصفوفة A حيث q هي قيمة تقريبية للقيمة الذاتية للمصفوفة A. لماذا تؤدي مثل هذه الطريقة إلى تقارب أسرع؟

11 - طبق طريقة القوى للمعكوس المبينة في تمرين (10) على المصفوفة A في تمرين (5) مع أخذ $q = 10$.

12 - طبق نظرية جرشغورن على المصفوفة A في تمرين (5). لتحديد المدى الذي تقع فيه كل قيمة ذاتية.

13 - هناك صيغ كثيرة لطريقة القوى منها ما يلي:

إذا كان U_0 هو المتجه الابتدائي، وكان:

$$U_n = A^n U_0$$

فإن متوسط نسب عناصر U_{n+1} إلى عناصر U_n تؤول إلى أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A عندما تسعى n إلى ما لا نهاية. أكتب برنامجاً فرعياً لهذه الطريقة.

الفصل العاشر

طريقة المربعات الصغرى

Least Square Method

10.1 مقدمة

نفترض أن لدينا النقط (x_i, y_i) التالية:

x	−2	−1	0	1	2
y	−3.1	−.9	1	3.2	4.8

والمطلوب معرفة أي من الدوال التالية تمثل العلاقة بين y, x تمثيلاً أفضل من الدوال الأخرى:

$$p_1(x) = 1.1 + 1.8x$$

$$p_2(x) = 1.0 + 1.99x$$

$$p_3(x) = 0.9 + 2.0x$$

لمعرفة ذلك نحسب قيم $p_k(x)$ عند النقط المذكورة x، ونحسب الفرق $e_k(x)$ بين القيمة الصحيحة y والقيمة التقديرية $p_k(x)$، أي أن:

$$e_k(x) = y_k(x) - p_k(x), \; k = 1,2,3 \tag{1.1}$$

والجدول (1.1) يبين هذه الحسابات.

x	y(x)	$p_1(x)$	$e_1(x)$	$p_2(x)$	$e_2(x)$	$p_3(x)$	$e_3(x)$
−2	−3.1	−2.5	−.6	−2.98	−.12	−3.1	0
−1	−.9	−.7	−.2	−.99	.09	−1.1	.2
0	1	1.1	−.1	1.0	0	.9	.1
1	3.2	2.9	.3	2.99	.21	2.9	.3
2	4.8	4.7	.1	4.98	−.18	4.9	−.1

جدول (1.1)

وبالتالي لكل $p_k(x)$ يوجد متجه (متجه الخطأ) بحيث:

$$E_1 = \begin{bmatrix} -.6 \\ -.2 \\ -.1 \\ .3 \\ .1 \end{bmatrix} \qquad E_2 = \begin{bmatrix} -.12 \\ .09 \\ 0 \\ .21 \\ -.18 \end{bmatrix} \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ .2 \\ .1 \\ .3 \\ -.1 \end{bmatrix}$$

وللمقارنة بين هذه المتجهات من حيث المقدار، نستعمل إحدى الطرق المعروفة في قياس طول المتجه وهو ما يعرف باسم معيار **Norm**. فإذا استعملنا **المعيار الإقليدي (Euclidean)** الذي نرمز له بالرمز $\|E\|_2$ فإن:

$$\|E_1\|_2 = [(-.6)^2 + (-.2)^2 + (-.1)^2 + (.3)^2 + (.1)^2]^{1/2} = 0.714$$

$$\|E_2\|_2 = [(-.12)^2 + (.09)^2 + 0^2 + (.21)^2 + (-.18)^2]^{1/2} = .315$$

$$\|E_3\|_2 = [0 + (.2)^2 + (.1)^2 + (.3)^2 + (-.1)^2]^{1/2} = .387$$

ومن ذلك نرى أن E_2 هو أقل مقداراً من E_1, E_2 وعلى ذلك فإن **$p_2(x)$ هي أفضل** (أي أقل خطأ) من $p_1(x)$ و $p_3(x)$، **ولكن يجب ملاحظة أن المعيار** الإقليدي ليس هو المعيار الوحيد لمقدار المتجه، وقد تختلف الإجابة **على أفضلية** تمثيل على آخر باختلاف نوع المعيار المستعمل في قياس مقدار المتجه.

10.2 خط المربعات الصغرى (Least Square Line)

إذا كان لدينا مجموعة من النقط:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$$

فهل بالإمكان إيجاد متعددة الحدود من المرتبة الأولى:

$$p(x) = a_0 + a_1 x \qquad (2.1)$$

بحيث يكون متجه الخطأ:

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_m \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

$$e_i = y_i - p(x_i) \qquad (2.3)$$

ذا حد أدنى من حيث المقدار؟ ذلك يعني أننا نريد تقليل الكمية:

$$\|E\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{m} (y_i - p(x_i))^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.4)$$

وذلك يكافىء إيجاد الحد الأدنى لمربع $\|E\|_2$ باختيار قيم a_0 و a_1 مناسبة. وبما أن $\|E\|_2$ يعتمد على a_0 و a_1، أي:

$$\|E\|_2^2 = f(a_0, a_1) \qquad (2.5)$$

حيث f دالة تتحدّد من (2.4) و (2.1)، فإن الحد الأدنى يحدث عندما:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a_0^2} > 0 \qquad (2.6)$$

وهذا يعني (من (2.5) ,(2.4)) أن:

$$2\sum_{i=1}^{m} (y_i - a_0 - a_1 x_i)(-1) = 0$$

أي:

$$\sum y_i - a_0 \sum 1 - a_1 \sum x_i = 0 \qquad (2.7)$$

حيث Σ تعني الجمع بالدليل i من 1 إلى m. إذن:

$$m a_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \qquad (2.8)$$

لاحظ أن:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_0^2} = 2\sum 1 = 2m > 0 \qquad (2.9)$$

أي أن الخطأ هو حد أدنى وليس أقصى. لاحظ أيضاً أن (2.8) يمكن كتابتها على الشكل:

$$a_0 + a_1 \bar{x} = \bar{y} \qquad (2.10)$$

حيث $\bar{x}$, $\bar{y}$ هي المتوسطات لكل من قيم x_i و y_i على التوالي، أي أن:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum x_i \qquad (2.11)$$

و:

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum y_i \qquad (2.12)$$

لإيجاد معادلة أخرى إلى جانب (2.8) نجري التفاضل الجزئي بالنسبة إلى a_1 لنحصل على:

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0$$

$$2\sum [y_i - a_0 - a_1 x_i](-x_i) = 0$$

$$\sum x_i y_i - a_0 \sum x_i - a_1 \sum x_i^2 = 0$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \qquad (2.13)$$

نلاحظ أيضاً أن:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} = 2\sum x_i^2 > 0$$

وهذا يعني أن القيمة القصوى المتحصل عليها هي حد أدنى وليس أعلى.

المعادلتان (2.8) و (2.13) يمكن كتابتهما على الشكل:

$$\begin{bmatrix} m & \Sigma x \\ \Sigma x & \Sigma x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

حيث أهمل الدليل i لغرض التسهيل في الكتابة. إذن بالإمكان إيجاد a_0 و a_1 طالما أن المحددة ليست صفراً، أي:

$$m \sum x^2 - (\sum x)^2 \neq 0 \qquad (2.15)$$

لنحصل على:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma y & \Sigma x \\ \Sigma xy & \Sigma x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & \Sigma x \\ \Sigma x & \Sigma x^2 \end{vmatrix}}$$

$$a_0 = \frac{\Sigma y \, \Sigma x^2 - \Sigma x \, \Sigma xy}{m \, \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \quad (2.16)$$

وبالطريقة نفسها نحصل على:

$$a_1 = \frac{m \, \Sigma xy - \Sigma y \, \Sigma x}{m \, \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

أو من (2.10):

$$a_1 = (\bar{y} - a_0)/\,\bar{x} \quad (2.17)$$

مثال (2.1):

أحسب معاملات متعددة الحدود من الدرجة الأولى في طريقة المربعات الصغرى للبيانات التالية:

x	−2	−1	0	1	2
y	−3.1	−.9	1.0	3.2	4.8

لحساب Σxy, Σx^2, Σx نكون الجدول التالي:

x	y	x^2	xy	
−2	−3.1	4	6.2	
−1	−.9	1	.9	
0	1	0	0	
1	3.2	1	3.2	
2	4.8	4	9.6	
0	5	10	19.9	المجموع

بالتعويض في (2.14)، نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 19.9 \end{bmatrix}$$

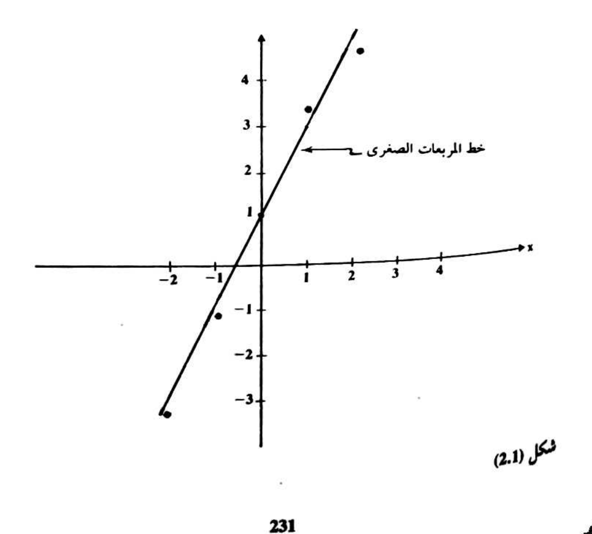
ومنها:

$$a_0 = 1, \; a_1 = 1.99$$

وبالتالي فإن متعددة الحدود من الدرجة الأولى:

$$p(x) = 1 + 1.99\,x$$

هي أفضل خط مستقيم لتمثيل البيانات المعطاة (وهذا يبين السبب في أن $p_2(x)$ في مقدمة هذا الفصل كانت الأقل خطأ من بقية الدوال) والشكل (2.1) يبين هذا الخط والنقط.



شكل (2.1)

مثال (2.2) :

أكتب برنامجاً لحساب معاملات متعددة الحدود من الدرجة الأولى:

$$p(x) = a_0 + a_1 x$$

لتمثيل النقط (x_i, y_i) وعددها m بطريقة المربعات الصغرى.

```
      DIMENSION X(100), Y(100)
      READ (*, *) M
      DO 10 I = 1, M
10    READ (*, *) X(I), Y(I)
      SX = 0
      SXY = 0
      SXX = 0
      SY = 0
      DO 20 I = 1, M
      SX = SX + X(I)
      SXX = SXX + X(I) * X(I)
      SXY = SXY + X(I) * Y (I)
20    SY = SY + Y(I).
      D = M * SXX - SX * SX
      AO = (SXX * SY - SX * SXY)/ D
      A1 = (M * SXY - SX *.SY)/ D
      WRITE (*, *) AO, A1
      STOP
      END
```

مثال (2.3) :

إذا كانت لدينا البيانات التالية عن عدد السكان في بلد ما بالملايين،
تنبأ بعدد السكان في هذا البلد سنة 1989

السنة	1986	1987	1988
عدد السكان	2.1	2.15	2.23

نلاحظ هنا أننا لو أخذنا x على أنها السنة فإن ذلك يجعل الأرقام في المعادلات كبيرة جداً، ولذلك يفضل أن نعرف x على أنها السنة مطروحاً منها 1987 ونعرف y بعدد السكان، ونكون الجدول التالي :

x	y	x^2	xy	
−1	2.10	1	−2.10	
0	2.15	0	0	
1	2.23	1	2.23	
0	6.48	2	0.13	المجموع

وبالتالي فإن :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.48 \\ 0.13 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 2.16 \qquad a_1 = .065$$

لتقدير عدد السكان في سنة ما ولتكن مثلاً 1989 نحسب:

$$x = 1989 - 1987 = 2$$

$$p(2) = 2.16 + .065(2) = 2.29$$

أي نتنبأ بعدد السكان في سنة 1989 بأن يكون 2.29 مليون.

ملاحظة :

نلاحظ أن اختيار x بحيث نجعل:

$$\Sigma x = 0$$

يجعل الحل سهلاً، وهذا يتحقق بأخذ: $x = t - \bar{t}$

حيث تمثل $\bar{t}$ متوسط القيم t (المتغير المستقل). في المثال السابق قيم t هي السنوات المعطاة و $\bar{t}$ هي 1987.

10.3 طريقة المربعات الصغرى لعلاقات غير خطية

بالإمكان استعمال طريقة المربعات الصغرى في العلاقات غير الخطية. فمثلاً الدالة:

$$y = a x^b \tag{3.1}$$

يمكن تحويلها إلى علاقة خطية بأخذ اللوغاريتم للطرفين، أي:

$$\ell n\, y = \ell n\, a + b\, \ell n\, x \tag{3.2}$$

وبتعريف:

$$u = \ell n\, x \tag{3.3}$$

$$v = \ell n\, y$$

تصبح (3.2) على الشكل الخطي:

$$v = \ell n\, a + bu$$

مثال (3.1):

أوجد a و b بطريقة المربعات الصغرى حيث: $p(x) = ax^b$

لتمثيل البيانات التالية:

x	1	2	3	4
y	2	3	3.5	4

بتعريف u و v كما في (3.3)، نكوّن الجدول (3.1).

x	y	u	v	u^2	uv
1	2	0	0.693	0	0
2	3	.693	1.10	.480	.762
3	3.5	1.10	1.25	1.21	1.38
4	4	1.39	1.39	1.93	1.93
المجموع		3.18	4.43	3.62	4.07

جدول (3.1)

وبالتالي فإن:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3.18 \\ 3.18 & 3.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.43 \\ 4.07 \end{bmatrix}$$

وعليه فإن:

$$A = \ell n\, a = .715$$

$$b = .492$$

وبالتالي فإن:

$$a = e^A = 2.04$$

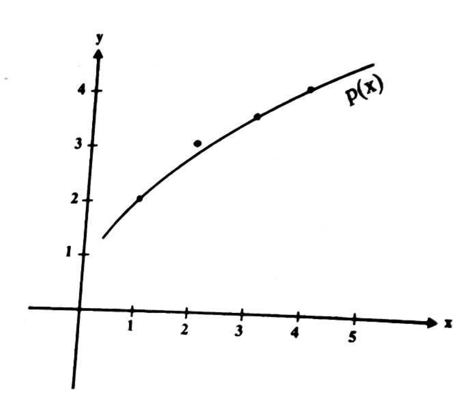
$$p(x) = 2.04\, x^{.492}$$

ملاحظة:

للمقارنة بين $p(x_i)$ والقيم y_i، نكوّن الجدول (3.2) مع الرسم البياني (شكل 3.1).

x	y	p(x)
1	2	2.04
2	3	2.87
3	3.5	3.5
4	4	4.04

جدول (3.2)



شكل (3.1)

هناك عدة أشكال غير خطية التي يمكن إيجاد معاملاتها بطريقة المربعات الصغرى، فمثلاً:

(أ) العلاقة: $y = ae^{bx}$

نستعمل هنا التحويل: $v = \ell n\, y$

فتصبح العلاقة على الشكل الخطي: $v = A + bx$

حيث: $A = \ell n\, a$

(ب) العلاقة: $y = a + be^{x}$

نستعمل هنا التحويل: $u = e^{x}$

فتصبح العلاقة على النحو: $y = a + bu$

مثال (3.2): افترض أن عدد الطلبة في كلية العلوم في السنوات الأربع الماضية يزداد على النحو التالي:

$$S = ae^{bY}$$

حيث S تمثل عدد الطلبة و Y تمثل رقم السنة والبيانات هي:

Y	1	2	3	4
S	990	1240	1570	1970

قدّر عدد الطلبة في السنة القادمة $(Y = 5)$.

أولاً نحوّل العلاقة إلى الشكل الخطي: $v = A + bu$

حيث:

$v = \ell n\, S,\ A = \ell n\, a + \bar{Y}\ b$

$u = Y - \bar{Y}$

والغرض من تعريف u على هذا النحو طبعاً الحصول على: $\Sigma u = 0$

ومن الجدول (3.3) (لاحظ أن $\bar{Y} = 2.5$)

Y	U	S	v	uv	u^2
1	−1.5	990	6.90	−10.35	2.25
2	−.5	1240	7.12	−3.56	.25
3	.5	1570	7.36	3.68	.25
4	1.5	1970	7.58	11.37	2.25
	0		18.96	1.14	5

جدول (3.3)

نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.96 \\ 1.14 \end{bmatrix}$$

$$A = 7.24$$

$$b = .228$$

أي أن:

$$A = \ell n\, a + 2.5\, b = \ell n\, a + 2.5\,(.228)$$
$$= 7.24$$

$$\ell n\, a = 6.67,\ a = e^{6.67} = 788$$

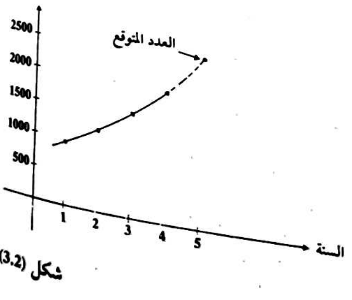
$$S = 788e^{.228(5)} = 2463$$

وبالتالي:

إذن فإن عدد الطلبة المتوقع في السنة القادمة هو: $S = 788e^{.228(5)} = 2463$

ملاحظة:

للمقارنة بين القيم المعطاة S والقيم المقدرة $\bar{S}$ نكوّن الجدول (3.4) والرسم البياني في شكل (3.2).



شكل (3.2)

Y	S	$\bar{S}$
1	990	990
2	1240	1243
3	1570	1561
4	1970	1961
5	?	2463

تمارين (1)

1- بيّن أي من الدوال التالية يمثل النقـط التالية أفضل تمثيل باستعمال معيـار اقليدس:

x	y
0	4
1	1
2	−12
3	−36

$$p_1(x) = 4.1 + 2.2x - 4.8\,x^2$$

$$p_2(x) = 3.9 + 2x - 5.1\,x^2$$

$$p_3(x) = 4.5 + 2.1x - 5x^2$$

2- أوجد خط المربعات الصغرى للبيانات في تمرين (1).

3- أوجد خط المربعات الصغرى للبيانات التالية:

x	67	70	73
y	476	496	526

أ- بدون تحويل للمتغيرات.

ب- باستعمال التحويل:

$$t = (x - 70)/\,3$$

$$z = (y - 496)/\,10$$

جـ- وضّح بالرسم الخط والنقط في المحورين t و z.

د- أحسب مقدار متجه الخطأ $\|E\|_2$.

هـ- أوجد خط المربعات الصغرى بتغير القيمة 526 إلى 516 بيّن لماذا يساوي الخطأ في هذه الحالة صفراً؟

4- بيّن أن خط المربعات الصغرى للنقـطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هـو نفسـه خط الاستكمال.

5 ـ «أ» إذا كانت $p(x) = a_0 + a_1x$ تمثّل خط المربعات الصغرى، أثبت أن:

$$a_1 = \frac{\Sigma (x - \bar{x})\, y}{\Sigma (x - \bar{x})^2}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

حيث $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ المتوسطان للقيم x_i و y_i على التوالي.

(ب) أكتب برنامجاً يقرأ عدداً من النقط (x_i, y_i) ويحسب a_0 و a_1 كما في «أ».

6 ـ أكتب برنامجاً لحساب a و b و $p(x_i)$ لقيم i من 1 إلى m حيث:

$$p(x) = ax^b$$

تمثل دالة المربعات الصغرى للنقط (x_i, y_i) وعددها m.

7 ـ أوجد تقريباً للدالة $\cos(x)$ على الشكل:

$$p(x) = a_0 + a_1 x^2$$

علماً بأن $\cos(0) = 1,\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

8 ـ أوجد a و b لتمثيل البيانات التالية على الصورة ax^b

x	1	2	3	4
y	3	12	25	50

قارن بين هذه البيانات وبيانات المربعات الصغرى بالرسم.

9 ـ أكتب البرنامج الفرعي SUBROUTINE LSL (X, Y, M, YC, EN)

الذي يحسب YC من خط المربعات الصغرى للنقاط:

X(I), Y(I) I = 1, 2, …, M

حيث:

YC(I) = P(X(I))

و P(X) هي الدالة الخطية للمربعات الصغرى، كما يحسب البرنامج **EN** مقدار الخطأ بمعيار إقليدس.

10.4 متعددة الحدود من الدرجة n

لإيجاد متعددة حدود المربعات الصغرى من الدرجة n:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \qquad (4.1)$$

نعرف دالة الخطأ:

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - p(x_i)]^2 \qquad (4.2)$$

ولكي تكون هذه الدالة ذات قيمة صغرى، نجعل:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = \frac{\partial f}{\partial a_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0 \qquad (4.3)$$

ومنها نحصل على النظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} m & \Sigma x & \Sigma x^2 & \dots & \Sigma x^n \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \dots & \Sigma x^{n+1} \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 & \dots & \Sigma x^{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma x^n & \Sigma x^{n+1} & \dots & \dots & \Sigma x^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \\ \Sigma x^2 y \\ \dots \\ \Sigma x^n y \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

وبالإمكان كتابة هذا النظام الخطي (الذي يعرف عادة بالمعادلات القياسية **Normal equations**) على النحو:

$$SA = B$$

حيث:

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{m} x_k^{i+j-2}$$

$$B_i = \sum_{k=1}^{m} x_k^{i-1} \; y_k$$

والمتجه A هو متجه المعاملات a_i. لاحظ أن S مصفوفة متماثلة.

مثال (4.1):

يتحرك جسيم بحيث تتغير المسافة y بالنسبة للزمن t على النحو:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

والجدول التالي يبين قياسات تم أخذها:

t	0	1	2	3	4
y	250	240	200	120	15

أوجد p(t) باستعمال طريقة المربعات الصغرى.

دع $x = t - \bar{t}$ حيث $\bar{t} = 2$ وكوّن الجدول التالي:

t	x	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
0	−2	4	−8	16	250	−500	1000
1	−1	1	−1	1	240	−240	240
2	0	0	0	0	200	0	0
3	1	1	1	1	120	120	120
4	2	4	8	16	15	30	60
	0	10	0	34	825	−590	1420

وبوضع n = 2 في النظام (3.4) فإن:

$$\begin{bmatrix} m & \Sigma x & \Sigma x^2 \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \\ \Sigma x^2 y \end{bmatrix}$$

وبالتعويض من الجدول في هذا النظام الخطي، وبعد الحل، يكون:

$$b_0 = 197.9 \qquad b_1 = -59 \qquad b_2 = -16.42$$

إذن:

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

$$p(t) = b_0 + b_1 (t - \bar{t}\,) + b_2 (t - \bar{t}\,)^2$$

$$= (b_0 - b_1\bar{t} + b_2\bar{t}^2) + (b_1 - 2\bar{t}\; b_2)\, t + b_2 t^2$$

$$= 250 + 6.7t - 16.42\, t^2$$

مثال (4.2):

أكتب البرنامج الفرعي:

SUBROUTINE LSQ (X, Y, M, C, N, EPS, IFLAG)

لحساب C معاملات متعددة حدود المربعات الصغرى للنقط (X, Y) وعددها M، حيث M أكبر من درجة متعددة الحدود (N − 1) وحيث N هو عدد المعاملات A. إذا كان المؤشر IFLAG صفراً عند الإخراج فذلك يعني عدم التوصل إلى حل للنظام الخطي نظراً لأن المحددة أقل من العدد الصغير EPS.

أولاً، نعرف كلاً من:

$$\text{sum } x(i) = \sum_{k=1}^{m} x_k^i \quad i = 1, 2, \ldots, 2n$$

و:

$$sumy\ (i) = \sum_{k=1}^{m} x_k^i y_k$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

وبالتالي فإن:

$$S_{ij} = \begin{cases} m & \text{في حالة: } i = j = 1 \\ sumx\ (i + j - 2) & i + j > 2 \end{cases}$$

$$B_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} y_k & \text{في حالة: } i = 1 \\ sumy\ (i - 1) & i > 1 \end{cases}$$

بعد تكوين المصفوفة S والمتجه B في النظام الخطي (4.4)، نستدعي البرنامج GEM في الفصل الثالث لحل هذا النظام.

```
C.....   LEAST SQUARE POLYNOMIAL.......
         SUBROUTINE LSQ (X, Y, M, C, N, EPS, IFLAG, S, SUMX, SUMY, B)
         DIMENSION X(M), Y(M), C(N), SUMX(10), SUMY(N), S(N, N), B(N)
         DO 10 I = 1, (N - 1) * 2
C        SUMX (I) = 0

         DO 20 K = 1, M
20       SUMX(I) = SUMX(I) + X(K) * * I
10       CONTINUE
         CONTINUE
         DO 30 I = 1, N - 1
         SUMY (I) = 0
40       DO 40 K = 1, M
30       SUMY (I) = SUMY (I) + Y(K) * X(K) ** I
         CONTINUE
         DO 100 I = 1, N
         IF (I. EQ. 1) THEN
             B(I) = 0
50           DO 50 K = 1, M
             B(I) = B(I) + Y (K)
         ELSE
             B(I) = SUMY (I - 1)
```



```
         ENDIF
         DO 60 J = 1, N
         IF (I + J. EQ. 2) THEN
             S(I, J) = M
         ELSE
             S(I, J) = SUM X (I + J - 2)
         ENDIF
60       CONTINUE
100      CONTINUE
         DO 222  I = 1, N
222      WRITE (*, *) (S (I, J), J = 1, N), B (I)
         CALL GEM (S, B, N, C, EPS, IFLAG)
         RETURN
         END
```

10.5 طريقة المربعات الصغرى بدوال محددة

بدلاً من متعددة الحدود (4.1) بالإمكان استعمال دالة على الصورة:

$$p(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \ldots + a_n g_n(x) \tag{5.1}$$

حيث الدوال $g_i(x)$ دوال معلومة وحيث:

$$e = \|E\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} [y_i - p(x_i)]^2 \tag{5.2}$$

ذا قيمة صغرى. وبوضع:

$$\frac{\partial e}{\partial a_j} = 0 \quad j = 0, 1, \ldots, n \tag{5.3}$$

نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{m} 2\,[y_i - p(x_i)]\,(-g_j(x_i)) = 0 \tag{5.4}$$

أو:

$$\sum_{i=1}^{m} p(x_i)\, g_j(x_i) = \sum_{i=1}^{m} y_i\, g_j(x_i) \tag{5.5}$$

$$j = 0, 1, \ldots, n$$

المعادلات (5.5) تصف نظاماً خطياً كما يلي:

$$\begin{bmatrix} (G_0, G_0) & (G_0, G_1) & \cdots & (G_0, G_n) \\ (G_1, G_0) & (G_1, G_1) & \cdots & (G_1, G_n) \\ (G_2, G_0) & (G_2, G_1) & \cdots & (G_2, G_n) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (G_n, G_0) & (G_n, G_1) & \cdots & (G_n, G_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_0, Y) \\ (G_1, Y) \\ (G_2, Y) \\ \cdots \\ \cdots \\ (G_n, Y) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

حيث:

$$G_i = \begin{bmatrix} g_i(x_1) \\ g_i(x_2) \\ \cdots \\ g_i(x_m) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

و:

$$(G_i, G_j) = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)\, g_j(x_k) \quad (5.8)$$

$$(G_i, Y) = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)\, y_k \quad (5.9)$$

ويسمى بالجداء الداخلي **(Inner Product)** المتفرق (discrete). أي أن الجداء الداخلي المتفرق لمتجهين U و V هو:

$$(U, V) = \sum_{k=1}^{m} u_k v_k \quad (5.10)$$

حيث:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

فإذا كانت: $(U, V) = 0$

نقول إن المتجهين U و V متعامدان **orthogonal**.

مثال (5.1):

أوجد دالة المربعات الصغرى على الصورة:

$$p(x) = a_0 + a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x)$$

للبيانات التالية:

x	0	π/4	π/2	3π/4	π
y	1	−.6	3	5.4	1

نلاحظ هنا أن:

$$g_0(x) = 1,\ g_1(x) = \sin(x),\ g_2(x) = \sin(2x)$$

لحساب الجداء الداخلي اللازم، نكوّن الجدول (5.1)

x	y	$g_1(x)$	$g_1^2(x)$	$g_2(x)$	$g_2^2(x)$	$g_1(x)g_2(x)$	$yg_1(x)$	$yg_2(x)$
0	1	0	0	0	0	0	0	0
π/4	−.6	$1/\sqrt{2}$	1/2	1	1	$1/\sqrt{2}$	$-.6/\sqrt{2}$	−.6
π/2	3	1	1	0	0	0	3	0
3π/4	5.4	$1/\sqrt{2}$	1/2	−1	1	$-1/\sqrt{2}$	$5.4/\sqrt{2}$	−5.4
π	1	0	0	0	0	0	0	0
Σ	9.8	$1+\sqrt{2}$	2	0	2	0	6.39	−6

جدول (5.1)

ومن (5.6) نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2.41 & 0 \\ 2.41 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8 \\ 6.39 \\ -6 \end{bmatrix}$$

ومن الحل، نجد أن: $a_0 = 1,\ a_1 = 1.99,\ a_2 = -3$

أي أن الدالة المطلوبة هي: $p(x) = 1 + 1.99 \sin(x) - 3 \sin(2x)$

ملاحظة:

لاحظ أن (في المثال السابق) المتجهين:

$$G_1 = \begin{bmatrix} \sin(x_1) \\ \sin(x_2) \\ \sin(x_3) \\ \sin(x_4) \\ \sin(x_5) \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} \sin(2x_1) \\ \sin(2x_2) \\ \sin(2x_3) \\ \sin(2x_4) \\ \sin(2x_5) \end{bmatrix}$$

متعامدان.

تمارين (2)

1 - (أ) أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثانية بطريقة المربعات الصغرى للدالة $f(x)$ حيث:

$f(0) = 1,\ f(.25) = 1.284,\ f(.5) = 1.649,\ f(.75) = 2.117$
$f(1) = 2.718$

(ب) بملاحظة أن هذه القيم مأخوذة من الدالة الأسية $f(x) = e^x$ أوجد

تقريباً للقيمة $f(.3)$ من «أ» وقارن بالقيمة الصحيحة.

2 - إذا كان عدد أعضاء هيئة التدريس في الجامعة يزداد على النحو التالي:

السنة	1984	1985	1986	1987	1988
العدد	200	215	300	370	400

استعمل طريقة المربعات الصغرى بمتعددة الحدود من الدرجة الثانية لتقدير العدد في سنة 1989.

3 - أكتب برنامجاً للقيام بالحسابات في تمرين (2). استعمل البرنامج الفرعي LSQ.

4 - أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثانية على الصورة:

$$p(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)$$

حيث:

$$g_0(x) = 1,\ g_1(x) = x,\ g_2(x) = 2x^2 - 1$$

وذلك بتطبيق طريقة المربعات الصغرى على البيانات التالية:

x	−1	−.5	0	.5	1
y	6	3.75	2	.75	0

5 - إذا كانت المتجهات G_i المعرفة في (5.7) متعامدة لجميع قيم i من $i = 0$ إلى $i = n$ فاثبت أن المعاملات:

$$a_i = (G_i, Y)/\|G_i\|_2^2$$

6 - إذا كانت الدوال $g_i(x)$ قد تم اختيارها بحيث كانت المتجهات G_i (أ من

الصفر إلى n) متعامدة، فاكتب برنامجاً فرعياً لحساب المعاملات a_i في (5.1).

7 ـ أكتب برنامجاً لحساب (G_i, G_j) لجميع قيم i و j من 1 إلى n حيث G_i هو المتجه المتكون من العناصر

$$g_i(x) = \sin\left(\frac{2\pi i x}{M}\right)$$

$$x = 1, 2, \ldots, M - 1$$

وبيّن عملياً أن هذه المتجهات متعامدة.

8 ـ بناء على الناتج في تمريني (5) و (6) اكتب برنامجاً لحساب a_i في دالة المربعات الصغرى:

$$p(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \ldots + a_n g_n(x)$$

حيث:

$$g_i(x) = \sin(2\pi i x/M)$$

للنقط:

$$(x_k, y_k) \quad k = 1, 2, \ldots, M - 1$$

حيث:

$$x_k = k$$

10.6 طريقة المربعات الصغرى في حل المسائل الحدية

نعود الآن للمسألة الحدية الخطية (3.7) من الفصل التاسع:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x) \qquad (6.1)$$

$$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b$$

ونحاول الحصول على متعددة الحدود من الدرجة n لتقريب الحل وذلك باستعمال طريقة المربعات الصغرى. دع:

$$z(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (6.2)$$

بحيث:

$$z(a) = y_a,\ z(b) = y_b \qquad (6.3)$$

كما نعرف الدالة:

$$w(x) = z'' + p(x)\,z' + q(x)\,z \qquad (6.4)$$

إذا كانت z قريبة من y فذلك يعني أن w(x) قريبة من r(x). وبالتالي نستعمل طريقة المربعات الصغرى لإيجاد z بحيث تكون الدالة w(x) أقرب ما تكون للدالة r(x). بتعبير آخر، إذا عرفنا المتجهين:

$$W = \begin{bmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ \ldots \\ w(x_m) \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} r(x_1) \\ r(x_2) \\ \ldots \\ r(x_m) \end{bmatrix} \qquad (6.5)$$

فإن المطلوب هو:

$$\text{حد أدنى} = \|W - R\|_2 \qquad (6.6)$$

لاحظ أن:

$$z'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n\,a_n x^{n-1}$$

$$z''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots + n(n-1)\,a_n x^{n-1} \qquad (6.7)$$

وبالتالي فإن:

$$w(x) = qa_0 + [p + qx]\,a_1 + [x^2 q + 2px + 2]\,a_2 + \ldots$$

أي أن:

$$w(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \ldots + a_n g_n(x)$$

حيث: $g_i(x)$ تعتمد على الدوال q, p.

مثال (6.1):

أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثانية:

$$z(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

لتقريب حل المسألة الحدية:

$$y'' + y = 0, \; y(0) = 0, \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

بما أن $z(x)$ يجب أن تحقق الشرطين الحديين، فإن: $z(0) = 0$

$$a_0 = 0$$

وينتج من ذلك أن:

$$z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

أيضاً:

$$\frac{\pi}{2} a_1 + \frac{\pi^2}{4} a_2 = 1$$

ويعني ذلك أن:

$$a_2 = \frac{4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi} a_1$$

أي أن:

$$z'(x) = a_1 + 2a_2 x$$

$$z''(x) = 2a_2$$

لتقريب الحل، نوجد:

$$w(x) = z'' + z = a_0 + a_1 x + [2 + x^2] a_2$$

إذن:

$$w(x) = g_0(x) + a_1 g_1(x)$$

أي أن:

$$g_0(x) = \frac{8}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} x^2$$

حيث:

$$g_1(x) = -\frac{4}{\pi} + x - \frac{2}{\pi} x^2$$

لكي يكون $w(x)$ أقرب ما يكون من الصفر (الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية) فإن طريقة المربعات الصغرى تؤدي إلى:

$$\Sigma g_0(x)\, g_1(x) + a_1 \Sigma g_1(x)^2 = 0$$

نلاحظ هنا أن الجمع Σ غير محدد وكلما زاد عدد قيم x كان التقريب أفضل. فإذا فرضنا أن النقط هي:

$$x_1 = \frac{\pi}{8}, \; x_2 = \frac{\pi}{4}, \; x_3 = \frac{3\pi}{8}$$

فإن:

$$\Sigma g_1^2(x) = 2.6911431$$

$$\Sigma g_0(x)\, g_1(x) = -3.13185$$

أي أن:

$$a_1 = 1.16376$$

وبالتالي فإن:

$$a_2 = -.335588$$

إذن الحل التقريبي هو:

$$z(x) = 1.16376x - .335588\, x^2$$

ملاحظات:

(1) بما أن الحل الصحيح للمسألة في المثال السابق هو:

$$y = \sin(x)$$

فبالإمكان أن نقارن بين الحل التقريبي $z(x)$ وهذا الحل كما في جدول (6.1). لاحظ أن الخطأ في حدود 5 بالمائة، وأن هذا الخطأ يمكن تقليصه بأخذ درجة أعلى لمتعددة الحدود $z(x)$.

x	z(x)	sin(x)	الخطأ
0	0	0	0
π/8	.40524	.3816	−.02
π/4	.70701	.7071	0
3π/8	.90523	.9238	.02
π/2	1	1	0

جدول (6.1)

(2) لو تم أخذ نقطة واحدة فقط لقيم x_i وهي نقطة المنتصف (أي $x_1 = \pi/4$ في المثال السابق) فإن طريقة المربعات الصغرى تؤول إلى طريقة الاستكمال (أي طريقة الفروق المنتهية مع $h = \pi/4$).

(3) بالإمكان تحسين التقريب باستعمال الجداء الداخلي المستمر بدلاً من الجداء الداخلي المتفرق. إذا كانت الدالتان f(x) و g(x) معرفتين في الفترة [a, b] فإن جداءهما الداخلي المستمر هو:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \qquad (6.8)$$

وهذا التعريف يؤدي إلى تعريف معيار للدالة (norm) وهو $\|f\|_2$ حيث:

$$\|f\|_2^2 = (f, f) = \int_a^b f^2(x)\, dx \qquad (6.9)$$

كما نصف الدالتين f و g بأنهما متعامدتان إذا كان جداؤهما الداخلي صفراً.

مثال (6.2):
أعد الحل في مثال (6.2) باستعمال الجداء الداخلي المستمر بدلاً من الجداء المتفرق.

تبقى الشروط الحدية للدالة z(x) كما هي ولكن المطلوب الآن هو تقليل الخطأ التالي:

$$e = \|w\|^2 = \int_0^{\pi/2} [g_0(x) + a_1 g_1(x)]^2\, dx$$

حيث $g_0(x)$ و $g_1(x)$ كما في المثال (6.1). بوضع:

$$\frac{\partial e}{\partial a_1} = 2\int_0^{\pi/2} [g_0(x) + a_1 g_1(x)]\, g_1(x) = 0$$

$$a_1 = -(g_0, g_1)/\|g_1\|^2$$

فإن:

وبما أن:

$$(g_0, g_1) = -1.8311022$$

$$\|g_1\|^2 = \int_0^{\pi/2} g_1^2(x)\, dx = 1.62847$$

فإن:

$$a_1 = 1.124428$$

$$a_2 = -.3105483$$

$$z(x) = 1.124428\,x - .3105483x^2$$

للمقارنة بين هذا الحل التقريبي والحل الصحيح، نكوّن الجدول التالي (6.2):

x	z(x)	sin(x)	الخطأ
$\pi/8$	.39367	.3816	−.012
$\pi/4$	.69156	.7071	0.015
$3\pi/8$	.89367	.9238	0.03

لاحظ أيضاً أن الخطأ يمكن تقليصه بأخذ درجة أعلى لمتعددة الحدود z(x).

10.7 تقريب الدوال باستعمال طريقة المربعات الصغرى

لتقريب دالة f(x) في الفترة [a, b] بمتعددة حدود p(x) بطريقة المربعات الصغرى، يتطلب أن يكون المعيار:

$$\|f(x) - p(x)\|_2$$

أقل ما يمكن. أي أن من التعريف (6.9)،

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\int_a^b [f(x) - p(x)]^2\, dx = 0$$

حيث a_i هي معاملات متعددة الحدود.

مثال (7.1):

أوجد خط المربعات الصغرى p(x) لتقريب الدالة: $f(x) = \sqrt{x}$

في الفترة [0, 1].

من الشرط:

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \int_0^1 [\sqrt{x} - a_0 - a_1 x]^2 dx = 0$$

نحصل على المعادلة:

$$a_0 + \frac{a_1}{2} = \frac{2}{3}$$

ومن الشرط:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^1 [\sqrt{x} - a_0 - a_1 x]^2 dx = 0$$

نحصل على المعادلة:

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{3} = \frac{2}{5}$$

وبحل المعادلتين:

$$a_0 = \frac{4}{15}, a_1 = \frac{4}{5}$$

أي أن:

$$p(x) = \frac{4}{15} + \frac{4}{5} x$$

تمارين (3)

1 ـ أثبت أن الدالتين:

$$f(x) = \sin(2\pi x)$$
$$g(x) = \cos(2\pi x)$$

متعامدتان في الفترة [0, 1].

2 ـ استعمل طريقة المربعات الصغرى لإيجاد متعددة الحدود من الدرجة الثانية كحل تقريبي للمسألة الحدية:

$$y'' - (2/x^2)y = 0, y(1) = 1, y(2) = 4$$

وذلك:

أ ـ باستعمال الجداء الداخلي المتفرق عند النقط:

$$x = 1.25, 1.5, 1.75$$

ب ـ باستعمال الجداء الداخلي المستمر.

3 ـ استعمل طريقة المربعات الصغرى لإيجاد متعددة الحدود من الدرجة الثالثة في إيجاد حل تقريبي للمسألة الحدية:

$$y'' + y = 0, y(0) = 0, y(1) = 1$$

أ) باستعمال الجداء الداخلي المتفرق عند النقط

$$x = 0.25, .5, .75$$

ب) باستعمال الجداء الداخلي المستمر.

4 ـ أوجد خط المربعات الصغرى لتقريب الدالة sin(x) في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5 ـ أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثانية لتقريب الدالة $\sqrt{x}$ في الفترة، [0, 1] بطريقة المربعات الصغرى.

نموذج اختبار (2)

الجزء الثاني (الفصول 8, 9, 10)

الزمن 1:30 (ساعة ونصف)

س (1) : أوجد $y(0.5)$ تقريبياً من المسألة الحدية:

$$y'' + xy = 1, y(0) = 0, y(1) = 2$$

باستعمال طريقة الفروق المنتهية ($h = .5$).

س (2) : أوجد قيمة تقريبية λ بحيث يكون للمسألة الحدية:

$$y'' + \lambda xy = 0, y(0) = 0, y(1) = 0$$

حل غير صفري، وذلك باستعمال طريقة الفروق المنتهية مع أخذ $h = 0.5$.

س (3) : لحل المسألة الحدية:

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(0) = 0, y(1) = 2$$

بطريقة التصويب أعطت المحاولة 1 = $y'(0)$ النتيجة 3 = $y(1)$. ثم أعطت المحاولة الثانية 2 = $y'(0)$ النتيجة 5 = $y(1)$. ما هي قيمة $y'(0)$ في المحاولة الثالثة بطريقة القاطع؟

س (4) : إذا كان U_0 هو المتجه الابتدائي، وكان $U_{i+1} = AU_i$ فإن متوسط نسب عناصر المتجه U_{i+1} إلى عناصر المتجه U_i تؤول إلى أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A عندما تسعى i إلى ما لا نهاية.

أكتب برنامجاً فرعياً لهذه الطريقة مستعملاً حداً أقصى من الدورات MAX ورقم اختبار التقارب EPS.

س (5) : أوجد علاقة خطية بين الضغط P ودرجة الحرارة T من البيانات التالية:

T	270	280	290
P	100	105	113

استعمل تحويلاً مناسباً وأوجد العلاقة على الصورة

$$P = a_0 + a_1 T$$

س (6) : لتمثيل البيانات (x_i, y_i) على الصورة:

$$p(x) = a_0 + a_1 (x - \bar{x}) + a_2 (x - \bar{x})^2$$

حيث $\bar{x}$ هو متوسط قيم x_i، أوجد a_1 بدلالة النقط (x_i, y_i).

الفصل الحادي عشر

حل المعادلات التفاضلية الجزئية
Solution of Partial Differential Equations

11.1 مقدمة

كمثال لمعادلة تفاضلية جزئية، ندرس المعادلة:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1.1)$$

حيث u دالة تعتمد على متغيرين هما x و t. تعتبر هذه المعادلة من المرتبة الثانية حيث إن مرتبة أعلى مشتقة في المعادلة هي المرتبة الثانية. في هذا الفصل، سنقوم بدراسة المعادلات الجزئية من المرتبة الثانية على الصورة:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \qquad (1.2)$$

حيث a, b, c, d, e, f, g إما مقادير ثابتة أو دوال في المتغيرين x و y. لاحظ أنه إذا كانت:

$$a = k, b = c = d = f = g = 0, e = -1$$

فإن (1.2) تصبح مكافئة للمعادلة (1.1).

تصنف المعادلة (1.2) بأنها مكافئة (parabolic) عندما:

$$b^2 - 4ac = 0 \qquad (1.3)$$

ونقول بأنها ناقصة (elliptic) عندما:

$$b^2 - 4ac < 0 \qquad (1.4)$$

وأنها معادلة زائدة (hyperbolic) عندما:

$$b^2 - 4ac > 0 \qquad (1.5)$$

وبالتالي فإن (1.1) معادلة مكافئة حيث إن: $b^2 - 4ac = 0$

أما المعادلة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (1.6)$$

فهي معادلة ناقصة حيث إن: $b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(1) < 0$

أما المعادلة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1.7)$$

فهي معادلة زائدة حيث إن: $b^2 - 4ac = -4(1)(-1) > 0$

تسمى (1.1) بمعادلة الانتشار (Diffusion Equation).

وتسمى (1.6) بمعادلة بواسون (Poisson Equation).

وتسمى (1.7) بمعادلة الموجة (Wave Equation).

وهي من أهم المعادلات التفاضلية الجزئية وستتعرض لحلها العددي بناء على شروط ابتدائية وحدية معينة.

تمارين (1)

1 - بيِّن ما إذا كانت الدالة: $u(t, x) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$

تحقق المعادلة: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

والشرط الابتدائي: $u(0, x) = \sin(\pi x)$

والشرطين الحديين: $u(t, 0) = 0$

$u(t, 1) = 0$

2 - صنف كُلًّا من المعادلات التالية من حيث كونها مكافئة أو ناقصة أو زائدة:

(أ) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$

(ب) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2u = 0$

(حـ) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 5z$

3 - بيِّن المناطق في المستوى x-y التي تكون فيها المعادلة:

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

مكافئة أو زائدة أو ناقصة.

11.2 معادلة الانتشار Diffusion Equation

لحل معادلة الانتشار $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ نحتاج إلى الشرط الإبتدائي:

$$u(0, x) = f(x)$$

والشرطين الحديين عند $x = a$ و $x = b$

$$u(t, a) = g_a(t) \qquad (2.2)$$

$$u(t, b) = g_b(t) \qquad (2.3)$$

أي أن المسألة ابتدائية وحدّية في نفس الوقت. دع:

$$a = 0$$

$$u_{ij} = u(i\Delta t, j\Delta x)$$

حيث:

$$j = 0, 1, 2, \ldots, N$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, M$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

$$\Delta t = T/M$$

و T هي آخر قيمة للمتغير t. وبالتالي فإن الحل العددي هو حساب u عند t_i (أي $i\Delta t$) و x_j (أي $j\Delta x$) من القيم الابتدائية:

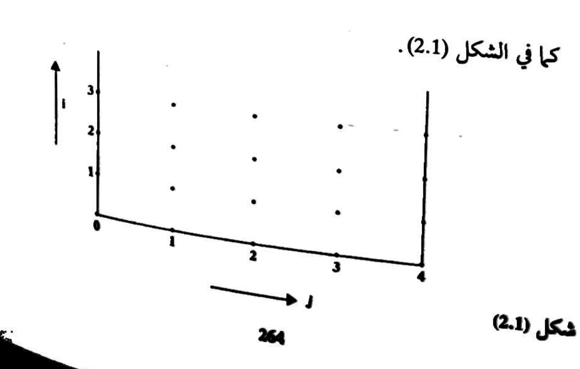
$$u_{01} \quad u_{02} \quad u_{03} \ldots\ldots u_{0n-1}$$

والقيم الحدية:

$$u_{00} \quad u_{10} \quad u_{20} \cdots u_{M0}$$

$$u_{0N} \quad u_{1N} \quad u_{2N} \cdots u_{MN}$$

كما في الشكل (2.1).



شكل (2.1)

لاحظ أن u معلومة عند النقاط الواقعة على الحدود والمطلوب قيمتها عند النقاط الداخلية. لاحظ في هذا الشكل أيضاً أن:

$$N = 4, M = 3$$

لإيجاد الحل العددي يمكننا أن نستعمل التقريب بالفرق المركزي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\Delta x^2} \qquad (2.4)$$

وبالفرق المتقدم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{\Delta t} \qquad (2.5)$$

وبالتالي فإن (1.1) تصبح:

$$\frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{\Delta t} \simeq k\,\frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\Delta x^2} \qquad (2.6)$$

أو:

$$u_{(i+1)j} = r\,(u_{ij-1} + u_{ij+1}) + (1 - 2r)\,u_{ij} \qquad (2.7)$$

حيث:

$$r = k\Delta t/\Delta x^2 \qquad (2.8)$$

لاحظ أن الصيغة (2.7) تم اشتقاقها باستعمال الفرق المتقدم للمشتقة الأولى $\partial u/\partial t$ وبالتالي فإن الطريقة مكافئة لطريقة أويلر، وعليه نطلق على (2.7) هذا الإسم.

مثال (2.1):
قضيب طوله 1 متر في درجة حرارة 100 مئوية وضعت نهايتاه في درجة حرارة صفر. أوجد درجة الحرارة عند أبعاد 0.25 و 0.5 و 0.75 من الطرف بعد مرور 0.01 و 0.02 و .03 ساعة، علماً بأن درجة الحرارة u توصف بمعادلة الانتشار، وأن معامل الانتشار k يساوي 1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

نلاحظ هنا أن:

$\Delta t = .01$

$\Delta x = .25$

$r = \Delta t/\Delta x^2 = 0.16$

$1 - 2r = 0.68$

وبالتالي فإن:

$$u_{i+1j} = 0.16u_{ij-1} + .68u_{ij} + 0.16u_{ij+1}$$

ونلاحظ أيضاً أن الحالة الابتدائية والحدية يمكن أن توضع على النحو التالي:

t = .03	0				0
t = .02	0				0
t = .01	0				0
t = 0	0	100	100	100	0
	x = 0	x = .25	x = .5	x = .75	x = 1

لحساب u_{11} (أي $t = .01$ و $x = .25$)

$$u_{11} = .16(0) + .68(100) + .16(100) = 84$$

ولحساب u_{12} (أي عند $t = .01$ و $x = .5$) نستعمل:

$$u_{12} = .16(100) + .68(100) + .16(100) = 100$$

وإذا استمررنا في هذه العملية، نحصل على الجدول التالي:

t = .03	0	65	88	65	0
t = .02	0	73	95	73	0
t = .01	0	84	100	84	0
t = 0	0	100	100	100	0
	x = 0	x = .25	x = .5	x = .75	x = 1

جدول (2.1)

ملاحظة:

(1) بالإمكان إثبات أن طريقة أويلر (2.7) ذات استقرار مشروط، وشرط الاستقرار هو:

$$r = k\,\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \qquad (2.9)$$

إذا تحققت هذه المتباينة (وذلك باختيار Δt و Δx مناسبة) فإن أي خطأ في القيم الابتدائية يؤول تأثيره إلى الصفر عندما يؤول المتغير t إلى ما لا نهاية. وهذا يؤدي إلى أن u_{ij} تؤول نفسها إلى الصفر عندما تؤول i إلى ما لا نهاية إذا كانت القيم الحدية أصفاراً.

(2) بالإمكان كتابة (2.7) كما يلي (بافتراض القيم الحدية أصفاراً).

$$U_{i+1} = (I + rA)\,U_i \qquad (2.10)$$

حيث A مصفوفة الثلاثة أقطار ذات $N - 1$ صف وعمود.

$$U_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \cdots \\ \cdots \\ u_{iN-1} \end{bmatrix} \qquad (2.11)\ A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

و I مصفوفة الوحدة.

من (2.10) يتضح أن:

$$U_n = (I + rA)^n U_0 \qquad (2.12)$$

لكي يؤول U_n إلى المتجه الصفري يجب أن تكون القيم الذاتية للمصفوفة:

$$B = I + rA \qquad (2.13)$$

أقل من الواحد (لماذا؟). وهذا يعني أن لجميع λ_i:

$$|1 + r\lambda_i| < 1 \qquad (2.14)$$

حيث λ_i هي القيم الذاتية للمصفوفة A. بتطبيق نظرية جرشجورن على المصفوفة A نلاحظ أن:

$$|\lambda_i + 2| \leq 2 \qquad (2.15)$$

من (2.14) و (2.15) يمكن استنتاج (2.9).

مثال (2.2):

أكتب برنامجاً لحساب u عند:

t = .001, .002, .003, ..., .5

x = .1, .2, ..., 0.9

حيث u تحقق:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0, x) = \sin(\pi x/2)$$

$$u(t, 0) = 0$$

$$u(t,1) = e^{-\pi^2 t}$$

نلاحظ هنا أن آخر قيمة للمتغير t هي:

T = 0.5

وهذا يعني أن

M = 0.5/ .001 = 500

لتوفير التخزين في ذاكرة الحاسب الآلي الرئيسية لا نستعمل u(I,J) كرمز للمتغير u_{ij} حيث إن هذه العملية في هذا المثال تتطلب الأبعاد (11 × 500) ولكن نستعمل متجهين فقط هما:

U(J), UNEW(J) J = 1, 2, ..., 11

ذلك لأن حساب U عند زمن I يتطلب فقط معرفة U عند I − 1.

```
      DIMENSION U(11), UNEW(11)
      PI = 3.14159
      F(X) = SIN (PI * X/2)
      GA(X) = 0
      GB(X) = EXP (-PI * PI * X)
      DT = 0.001
      DX = 0.1
      R = DT/(DX * DX)
      N = 10
      N1 = N + 1
      M = 500
C
      DO 10 J = 2, N
      X = (J - 1) * DX
   10 U(J) = F(X)
C
      T = 0
      U(1) = GA(T)
      U(N1) = GB(T)
      WRITE (*, 15) T, (U(J), J = 1, N1)
   15 FORMAT ('  T = ', F6.3, 11F10.5)
C
      DO 100 I = 1, M
      T = I * DT
      DO 25 J = 2, N
   25 UNEW (J) = R * (U (J - 1) + U (J + 1)) + (1 - 2 * R) * U(J)
      UNEW (1) = GA (T)
      UNEW (N1) =GB(T)
      DO 30 J = 1, N1
   30 U(J) = UNEW (J)
      WRITE (*, 15) T, (U(J), J = 1, N1)
  100 CONTINUE
      STOP
      END
```

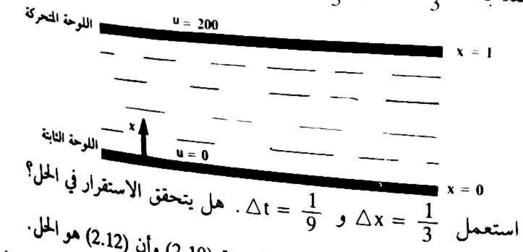
لاحظ أن قيمة R في هذا البرنامج هي :

$$R = .001/(.1)^2 = .1 < 0.5$$

وبالتالي فإن النتائج تكون مستقرة. أما لو لم يتحقق هذا الشرط فإن قيم u ستزداد بمعدل سريع وينتج خطأ في البرنامج بسبب تعدي الأرقام الحد المسموح به في الجهاز.

تمارين (1)

1 - في الشكل المرفق سائل بين لوحتين، ومن السكون تم تحريك اللوحة العليا بسرعة 200 وبقيت اللوحة السفلى ساكنة، فإذا كانت سرعة السائل u تحقق معادلة الانتشار بمعامل الانتشار $k = 0.1$، فاحسب سرعة السائل عند بعد $x = \frac{1}{3}$ و $x = \frac{2}{3}$ بعد فترة زمنية $\frac{1}{9}$ و $\frac{2}{9}$ و $\frac{3}{9}$.



استعمل $\Delta x = \frac{1}{3}$ و $\Delta t = \frac{1}{9}$. هل يتحقق الاستقرار في الحل؟

2 - وضّح أن الصيغة (2.7) تكافىء الصيغة (2.10) وأن (2.12) هو الحل.

3 - استنتج بشيء من التفصيل أن: $k\Delta t/\Delta x^2 \leq 0.5$ تحقق استقرار الحل العددي لمعادلة الانتشار بطريقة أويلر، أنظر (2.13) و (2.14) و (2.15).

4 - باستعمال التقريب بالفرق المتأخر:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} = \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{\Delta t}$$

قم باشتقاق الصيغة:

$$U_{i+1} = (I - rA)^{-1} U_i$$

حيث U_i و A كما هما في (2.11)، وذلك لحل معادلة الانتشار بقيم حدية صفرية.

5 - بيّن أن صيغة الفرق المتأخر في تمرين (4) ذات استقرار غير مشروط.

6 - حل معادلة الانتشار بمعامل انتشار $k=1$ وشرط ابتدائي:

$$u(0, x) = 100 \sin(\pi x)$$

وشروط حدية صفرية و: $\Delta t = \frac{1}{4} \quad \Delta x = \frac{1}{4}$

وذلك عند $t = 1$،

(أ) باستعمال طريقة أويلر.

(ب) باستعمال طريقة الفرق المتأخر المبينة في تمرين (4) قارن بين الحلين مع التعليق.

(حـ) اكتب برنامجاً لحساب u عند $t = 5$ بطريقة أويلر مستعملاً $\Delta t = .01, \Delta x = .2$.

(د) أكتب برنامجاً لحساب u عند $t = 5$ مستعملاً طريقة الفرق المتأخر والقيم $\Delta x = .2$ و $\Delta t = .1$. (افترض وجود برنامج فرعي للمعكوس).

11.3 معادلة بواسون Poisson Equation

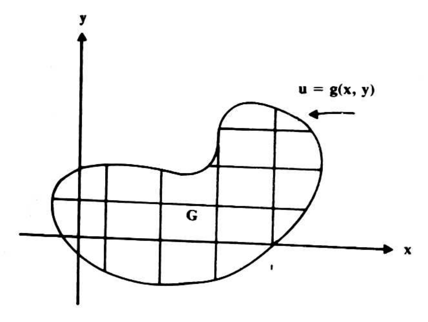
تسمى المعادلة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (3.1)$$

بمعادلة بواسون وهي معادلة من النوع الناقص (Elliptic) ويمكن حلها إذا علمت قيم u عند حدود منطقة G في المستوى $x - y$، أي:

$$u(x, y) = g(x, y) \qquad (3.2)$$

لجميع قيم (x, y) الواقعة على حدود G، كما في الشكل (3.1).



شكل (3.1)

من الناحية التطبيقية قد تصف u درجة الحرارة في الحالة الثابتة (أي لا تعتمد على الزمن). لاحظ أن المعادلة (3.1) تتحقق عند النقط الداخلية في المنطقة G وأن الدالة $g(x, y)$ من المعطيات.

لحل (3.1) مع الشرط الحدي (3.2) نقسم المنطقة G إلى مربعات أو مستطيلات صغيرة ذات أبعاد Δx و Δy، ونستعمل التقريب:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} [u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)] \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2} [u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)] \qquad (3.4)$$

(3.5)

وباستعمال الاصطلاح:

$$u_{ij} = u(x_i, y_j), \; f_{ij} = f(x_i, y_j)$$

حيث:

$$x_i = x_0 + i\Delta x \qquad (3.6)$$
$$y_j = y_0 + j\Delta y$$

نحصل على:

$$\Delta y^2 (u_{i+1j} + u_{i-1j}) + \Delta x^2 (u_{ij+1} + u_{ij-1}) - 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) u_{ij} \simeq \Delta x^2 \Delta y^2 f_{ij} \qquad (3.7)$$

ونأخذ $r = \Delta x / \Delta y$

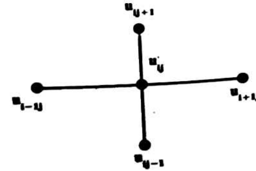
نحصل على:

$$u_{ij} \simeq \frac{1}{2(1 + r^2)} [u_{i+1j} + u_{i-1j} + r^2 (u_{ij+1} + u_{ij-1}) - \Delta x^2 f_{ij}] \qquad (3.8)$$

وفي الحالة الخاصة $\Delta x = \Delta y = h$ فإن (3.8) تصبح:

$$u_{ij} \simeq \frac{1}{4} [u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - h^2 f_{ij}] \qquad (3.9)$$

وهي (في حالة $f_{ij} = 0$) تعني أن u تساوي متوسط قيم u في الأربع نقط المجاورة كما يلي:



تجدر الإشارة هنا إلى أن (3.9) هو نظام خطي في المجاهيل u_{ij} وأن هذا النظام يكاد يكون سائداً قطرياً مما يجعله مهيئاً لاستعمال طريقة جاوس - سيدل، كما يوضح المثال التالي:

مثال (3.1):

أوجد قيم $u(x, y)$ عند النقاط الداخلية المبينة في الشكل الآتي:

$j\Delta y = y$

$u_{13} = 3$ $u_{23} = 5$ $u_{33} = 6$

.75 u_{13} u_{23} u_{33} u_{43}

$u_{02} = 0$ .5 u_{12} u_{22} u_{32} u_{42} $u_{42} = 0$

$u_{01} = 0$ .25 u_{11} u_{21} u_{31} u_{41} $u_{41} = 0$

.25 .5 .75 1 x

$u_{10} = 1$ $u_{20} = 2$ $u_{30} = 4$

علماً بأن u تحقق معادلة لابلاس (Laplace) التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

وأن u معلومة عند نقط الحدود كما هو مبين بالشكل. استعمل طريقة جاوس سيدل لحل (3.9) بحساب 3 دورات فقط.

نلاحظ هنا أن المجاهيل هي: $u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{12}, u_{22}, u_{32}$

$u_{ij} = u(i\Delta x, j\Delta y)$

حيث: $h = \Delta x = \Delta y = 0.25$

و:

بوضع $i = 1$ و $j = 1$ في (3.9) نجد أن:

$$u_{11} = \frac{1}{4}[u_{21} + u_{01} + u_{12} + u_{10}]$$

مع ملاحظة أن $f(x, y) = 0$ في هذا المثال. ولكن من المعطيات فإن: $u_{01} = 0, u_{10} = 1$

أي:

$$u_{11} = \frac{1}{4}[u_{21} + u_{12} + 1] \quad (1)$$

وبأخذ $i = 2$ و $j = 1$ فإن:

$$u_{21} = \frac{1}{4}[u_{31} + u_{11} + u_{22} + u_{20}]$$

وحيث (من المعطيات في هذا المثال) أن $u_{20} = 2$

فإن

$$u_{21} = \frac{1}{4}[u_{31} + u_{11} + u_{22} + 2] \quad (2)$$

وبأخذ $i = 3$ و $j = 1$ فإن:

$$u_{31} = \frac{1}{4}[u_{41} + u_{21} + u_{32} + u_{30}]$$

$$u_{31} = \frac{1}{4}[u_{21} + u_{32} + 4] \quad (3)$$

وبنفس الطريقة فإن:

$$u_{12} = \frac{1}{4}[u_{22} + u_{02} + u_{13} + u_{11}]$$

$$u_{12} = \frac{1}{4}[u_{22} + u_{13} + u_{11}] = \frac{1}{4}[u_{22} + u_{11} + 3] \quad (4)$$

$$u_{22} = \frac{1}{4}[u_{32} + u_{12} + u_{23} + u_{21}] = \frac{1}{4}[u_{32} + u_{12} + u_{21} + 5] \quad (5)$$

$$u_{32} = \frac{1}{4}[u_{42} + u_{22} + u_{33} + u_{31}]$$

$$u_{32} = \frac{1}{4}[u_{22} + u_{31} + 6] \quad (6)$$

وبذلك يكون لدينا ست معادلات نستعمل لحلها طريقة جاوس - سيدل. نبدأ أولاً بالقيم الابتدائية ولتكن:

$$u_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3 \qquad j = 1, 2$$

ويفضّل أن نبدأ بقيمة ثابتة تساوي تقريباً متوسط القيم الحدية.

ومنها نحسب الجدول التالي :

	القيم الابتدائية	الدورة الأولى	الدورة الثانية	الدورة الثالثة
u_{11}	1	0.75	0.84375	1.026367
u_{21}	1	1.1875	1.621094	1.915771
u_{31}	1	1.546875	2.007813	2.143738
u_{12}	1	1.1875	1.484376	1.663818
u_{22}	1	2.09375	2.628906	2.809692
u_{32}	1	2.410156	2.659180	2.738358

ملاحظات :

(1) للحصول على حل أكثر دقة نحتاج لعدد أكثر من الدورات. ويمكن إيقاف الدورات في حالة تحقيق :

$$\max_{i,j}\left|u_{ij}^{(k+1)} - u_{ij}^{(k)}\right| < \varepsilon \qquad (3.10)$$

حيث k تعني رقم الدورة و ε رقم صغير تتوقف قيمته على الدقة المطلوبة.

(2) الصورة العامة لحل النظام الخطي (3.9) بطريقة جاوس سيدل هي :

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1j}^{(k)} + u_{ij+1}^{(k)} + u_{i-1j}^{(k+1)} + u_{ij-1}^{(k+1)} - h^2 f_{ij}\right] \qquad (3.11)$$

حيث الدليل العلوي k يعني الدورة k. أما لو استعملنا طريقة جاكوبي لحل هذا النظام الخطي فإن قيم u في الطرف الأيمن من (3.11) تكون كلها في الدورة k.

(3) بالإمكان كتابة المعادلات من (1) إلى (6) في مثال (3.1) على النحو التالي :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن هذا النظام الخطي سائد قطرياً وبالتالي فإن تقارب طريقة جاوس - سيدل أو طريقة جاكوبي مضمون في هذه الحالة.

مثال (3.2) :

أكتب برنامجاً لحساب u_{ij} من معادلة بواسون مع قراءة ما يلي :

1 - الشروط الحدية على مستطيل في حدوده الأربعة بما في ذلك عدد التقسيمات في الاتجاه الأفقي N وعددها في الاتجاه العمودي M وطول المستطيل في الاتجاه الأفقي A وعرضه في الاتجاه العمودي B.

2 - قيمة ε لتحقيق الحالة (3.1) والعدد الأقصى للدورات وليكن MAX. مع تحديد الدالة f(x, y) في برنامج فرعي منفصل. استعمل طريقة جاوس - سيدل في حل النظام الخطي (3.8).

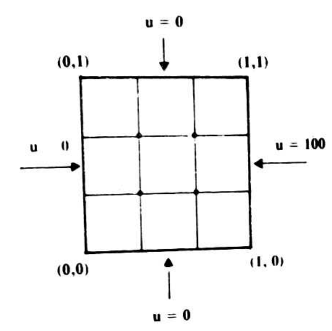
```
DIMENSION U (20, 20), UN (20, 20)
WRITE (*, *)' ENTER VALUES OF A, B - - >'
READ (*, *) A, B
WRITE (*, *)' ENTER VALUES OF N, M - - >'
READ (*, *) N, M
WRITE (*, *)' LEFT BOUNDARY CONDITIONS - - >'
READ (*, *) (UN (1, J), J = 2, M)
WRITE (*, *)' RIGHT BOUNDARY CONDITIONS - - >'
READ (*, *) (UN (N + 1, J), J = 2, M)
WRITE (*, *)' BOTTOM BOUNDARY CONDITIONS - - >'
READ (*, *) (UN (I, 1), I = 2, N)
WRITE (*, *)' TOP BOUNDARY CONDITIONS - - >'
READ (*, *) (UN (I, M + 1), I = 2, N)
WRITE (*, *)' ENTER MAX, EPS - - >'
READ (*, *) MAX, EPS
```

```
C
          DX = A/ N
          DY = B/ M
          RSQ = (DX/ DY) ** 2
C
C
          DO 50 I = 2, N
          DO 50 J = 2, M
50        UN (I, J) = 1
          DO 55 I = 1, N + 1
          DO 55 J = 1, M + 1
55        U (I, J) = UN (I, J)
C
          DO 100 IT = 1, MAX
          DO 60 J = 2, M
          DO 60 I = 2, N
60        UN (I, J) = (UN (I - 1, J) + U (I + 1, J)
     *        + RSQ * (UN (I, J - 1)
     *        + U (I, J + 1))
     *        - DX ** 2 * F ((I - 1) * DX, (J - 1) * DY))
     *        / (2 + 2 * RSQ)
          DO 70 I = 2, N
          DO 70 J = 2, M
          IF (ABS (UN (I, J) - U (I, J)). GT. EPS) GO TO 80
70        CONTINUE
          GO TO 200
80        DO 90 I = 2, N
90        DO 90 J = 2, M
100       U (I, J) = UN (I, J)
200       CONTINUE
          WRITE (*, *)' NO. OF ITERATIONS PERFORMED =', IT - 1
          WRITE (*, *)
          WRITE (*, *)' SOLUTIONS'
          WRITE (*, *)
          DO 250 J = 1, M + 1
250       K = M + 2 - J
          WRITE (*, *) (U (I, K), I = 1, N - 1)
          STOP
C         END

          FUNCTION F (X, Y)
          F = 0
          RETURN
          END
```


تمارين (2)

1. إذا كانت درجة الحرارة u تحقق معادلة لابلاس، وكانت ثابتة عند محيط مربع طول ضلعة متر واحد على النحو التالي:



أ - أوجد قيماً تقريبية لدرجة الحرارة عند النقط الداخلية الأربع المبينة بالرسم، وذلك بحل معادلة لابلاس بطريقة الفروق المحدودة مستعيناً بطريقة جاوس سيدل في حل النظام الخطي الناتج (احسب 5 دورات فقط).

ب - أعد «أ» مستبدلاً طريقة جاوس - سيدل بطريقة جاكوبي.

حـ - أعد «أ» ولكن بحل النظام الخطي بطريقة الحذف لجاوس.

د - أكتب برنامجاً للقيام بالحسابات في «أ» و«ب» و«حـ».

2. أوجد صيغة الخطأ في التقريب (3.9):

$$e_{ij} = -\frac{h^4}{48}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right]$$

حيث المشتقة الرابعة تحسب عند نقطة غير محددة.

3. (أ) أوجد قيم u_{ij} داخل المستطيل:

(0,4) (3,4)

(0,0) (3,0)

علماً بأن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xy^2 + 2x^3$$

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0$$

$$u(3, y) = y^2 \qquad u(x, 4) = 16x^3$$

استعمل $\Delta x = 1$ و $\Delta y = 2$.

(ب) بيِّن أن $u(x, y) = x^3 y^2$ تحقق الحل المطلوب وقارن بين هذا الحل والقيم التقريبية في (أ). هل يتساوى الحلان ولماذا؟

11.4 معادلة الموجة Wave Equation

بالإمكان حل معادلة الموجة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x) \qquad (4.1)$$

وذلك عند توفر الشرطين الابتدائيين:

$$u(0, x) = \phi(x) \qquad (4.2)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x) \qquad (4.3)$$

والشرطين الحديين:

$$u(t, 0) = g_0(t) \qquad (4.4)$$

$$u(t, \ell) = g_\ell(t) \qquad (4.5)$$

المعادلة (4.1) مع الشرطين الابتدائيين والحديين تصف عدة حالات في

الطبيعة. فمثلاً إذا كان لدينا سلك كثافته ρ وتحت تأثير شد T فإن $u(t, x)$ تصف في هذه الحالة تموجات السلك حيث:

$$c^2 = T/\rho \qquad (4.6)$$

تمثل مربع سرعة انتقال الموجة. لاحظ أن $\phi(x)$ تمثل وضعية السلك في البداية وأن $\psi(x)$ تمثل السرعة الابتدائية في الاتجاه العمودي (أي x).

لإيجاد تقريب للحل، نستعمل الفروق المركزية في (4.1) لنحصل على:

$$\frac{1}{\Delta t^2}(u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}) - \frac{c^2}{\Delta x^2}(u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}) \simeq f_{ij} \qquad (4.7)$$

ومنها نحصل على:

$$u_{i+1j} \simeq (1 - r)\, 2u_{ij} - u_{i-1j} + r(u_{ij+1} + u_{ij-1}) + \Delta t^2 f_{ij} \qquad (4.8)$$

حيث:

$$r = \Delta t^2 c^2 / \Delta x^2 \qquad (4.9)$$

وفي الحالة الخاصة ($r = 1$) أي:

$$\Delta x = c\Delta t \qquad (4.10)$$

فإن (4.8) تصبح:

$$u_{i+1j} \simeq u_{ij+1} + u_{ij-1} - u_{i-1j} + \Delta t^2 f_{ij} \qquad (4.11)$$

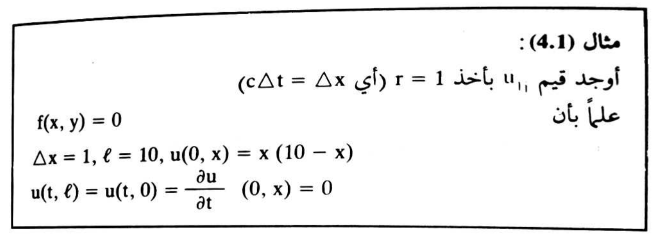
وهي علاقة يمكن (عندما $f = 0$) التعبير عنها كالآتي:

u_{i+1j}

+ +

u_{ij-1} u_{ij} u_{ij+1}

u_{i-1j}


مثال (4.1):

أوجد قيم u_{1j} بأخذ $r = 1$ (أي $c\triangle t = \triangle x$)

علماً بأن

$f(x, y) = 0$

$\triangle x = 1, \ell = 10, u(0, x) = x\,(10 - x)$

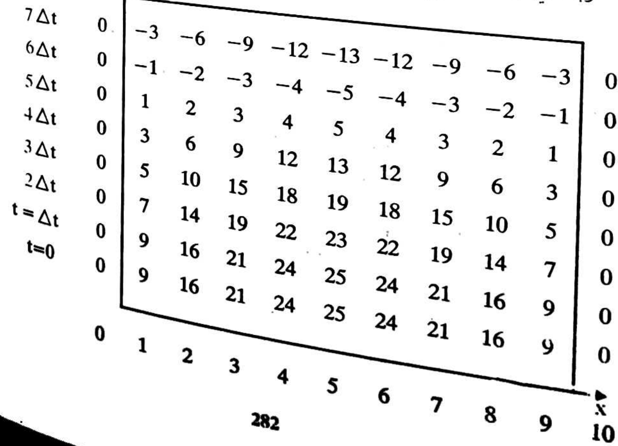
$u(t, \ell) = u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}\ (0, x) = 0$

نلاحظ أولاً أن لتطبيق (4.11) تلزم معرفة قيم u_{1j} وهذه يمكن الحصول عليها من التقريب:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\ (0, x) \simeq \frac{u(\triangle t, x) - u(0, x)}{\triangle t}$$

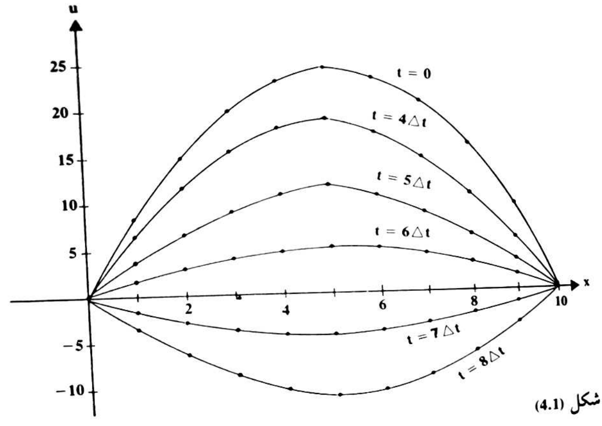
وبما أن $\frac{\partial u}{\partial t}\ (0, x) = 0$ فإن $u_{1j} \approx u_{oj}$

وبالتالي يمكننا وضع الحل في الجدول التالي (ابتداء من أسفل إلى أعلى):



t \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$7\triangle t$	0	−3	−6	−9	−12	−13	−12	−9	−6	−3	0
$6\triangle t$	0	−1	−2	−3	−4	−5	−4	−3	−2	−1	0
$5\triangle t$	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0
$4\triangle t$	0	3	6	9	12	13	12	9	6	3	0
$3\triangle t$	0	5	10	15	18	19	18	15	10	5	0
$2\triangle t$	0	7	14	19	22	23	22	19	14	7	0
$t = \triangle t$	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0
$t = 0$	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0

ويمكن تمثيل هذه النتائج بيانياً في الشكل (4.1).



شكل (4.1)

نلاحظ أن قيم u_{ij} (إذا قمنا بحساب هذه القيم عند فترات زمنية أكثر) تتكرر بعد زمن معين وهو ما يعرف بالذبذبة، وإذا كانت $f = 0$ فإن الخطأ في التقريب (4.7) هو:

$$e_{ij} = \frac{1}{12}\,(c^2 \triangle x^2 - \triangle t^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^4}\,(t_i, x_j) + \cdots \quad (4.12)$$

ذلك لأن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{\triangle t^2} - \frac{\triangle t^2}{12}\,\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\,(t_i, x_j) + \cdots \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\triangle x^2} - \frac{\triangle x^2}{12}\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\,(t_i, x_j) + \cdots \quad (4.14)$$

وحيث إن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.15)$$

فإن:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^6 u}{\partial t^6} = c^6 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}, \ldots \tag{4.16}$$

بافتراض وجود هذه المشتقات. يتضح من (4.13) و (4.14) و (4.16) استنتاج (4.12). ومنها يتضح أيضاً أن:

$$\Delta x = c\Delta t \quad \text{عندما} \quad e_{ij} = 0 \tag{4.17}$$

نلاحظ أيضاً أن شرط الاستقرار في (4.8) هو:

$$c\Delta t/\Delta x \leq 1$$

تمارين (3)

1 - الجدول التالي يبين قيم u عند $t = 0$ و $t = \Delta t$ لسلك مهتز طوله 4 وحدات.

	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4
t = Δt	0	1	2	1	0
t = 0	0	1	2	1	0

بفرض $c\Delta t = \Delta x$ أوجد u_{8j} (أي بعد فترة زمنية $8\Delta t$) وبيِّن هذه القيم بالرسم.

2 - إذا كانت سرعة انتقال الموجة $c = 10$ (أمتار في الثانية) وتم تقسيم السلك إلى 5 فترات بحيث $\Delta x = .2$ فما أقصى قيمة للفترة الزمنية Δt حتى يتحقق استقرار الحل العددي بالفروق المركزية؟ بيِّن إجابتك بأخذ قيم مختلفة لـ Δt على البيانات التالية للقيم الابتدائية:

t = Δt	0	0	0	1	0	0	0	0
t = 0	0	0	0	1	0	0	0	0

3 - بيِّن أن الدالة:

$$u(t, x) = \sin(\pi x) \cos(\pi t)$$

تحقق المعادلة الموجية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

والشرطين الحديين:

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0$$

والشرطين الابتدائيين:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0$$

أكتب برنامجاً لحل هذه المسألة مستعملاً $\Delta x = \Delta t$ بقيم مختلفة وقارن الحل العددي مع الحل المبين أعلاه.

استعمل أيضاً قيم Δt و Δx بحيث $\Delta x < \Delta t$ ثم $\Delta x > \Delta t$.

نموذج امتحان شامل

الجزء الثاني

(الزمن: ساعتان)

س (1) : أوجد القيم الذاتية للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

س (2) : استعمل طريقة القوى (دورتين فقط) لإيجاد قيمة تقريبية ذاتية للمصفوفة في س (1) مبتدئاً بالقيمة الابتدائية للمتجه الذاتي

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

س (3) : أكتب برنامجاً لحساب y عند $x = 2$ من المسألة الابتدائية:

$$y'' + y = \sin(x), \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

وذلك بطريقة أويلر مع $h = 0.1$.

س (4) : حل مسألة القيمة الحدية:

$$y'' + 3xy = 0$$
$$y(0) = 0, \; y(1) = 1$$

بطريقة الفروق المركزية مع أخذ $h = \frac{1}{3}$.

س (5) : أوجد ميل خط المربعات الصغرى للنقط $(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$

س (6) : أكتب جزءاً من برنامج لتكوين المصفوفة:

$$S = \begin{bmatrix} 10 & \Sigma x & \Sigma x^2 \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \end{bmatrix}$$

حيث Σ تعني الجمع لقيم x_i من 1 إلى 10 والتي تتم قراءتها في البرنامج.

س (7) : استعمل طريقة أويلر مع أخذ $\Delta x = \frac{1}{3}$ و $\Delta t = \frac{1}{200}$ لحساب u من المعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,x) = 9x^2$$
$$u(t,0) = 0$$
$$u(t,1) = 9$$

«أ» احسب u عند $x = \frac{1}{3}$ ، $x = \frac{2}{3}$ ، $t = \frac{1}{200}$.

«ب» هل يتحقق الاستقرار عندما تؤول t إلى ∞ في الفقرة «أ» ؟

ملحق (1)
حلول الاختبارات

نموذج اختبار 1 (الجزء الأول)

الزمن: 1:30 (ساعة ونصف)

س 1:

أ- بيِّن أن الفترة (0.2 ,0,1) تحتوي على جذر للمعادلة $\frac{1}{x} - 7 = 0$

الإجابة:

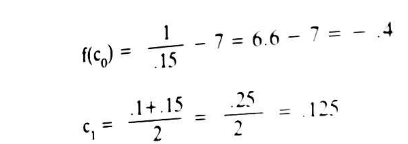
$f(x) = \frac{1}{x} - 7 \quad f(.1) = 10 - 7 = 3 \quad f(.2) = 5 - 7 = -2$

بما أن f(x) دالة مستمرة و f(.1) f(.2) قيمة سالبة، فلا بد أن يقع جذر في الفترة (.2 ,.1).

ب- استعمل دورتين في طريقة التنصيف لحساب جذر المعادلة في «أ» مع استعمال الفترة الابتدائية (0.2 ,0.1).

الإجابة:

$c_0 = (.1 + .2)/2 = .15$



$$f(c_0) = \frac{1}{.15} - 7 = 6.6 - 7 = -.4$$

$$c_1 = \frac{.1 + .15}{2} = \frac{.25}{2} = .125$$

حـ - احسب الحد الأعلى للخطأ المطلق إذا كان عدد الدورات في «ب» خمسة.

الإجابة: $.003 = \frac{.1}{32} = \frac{.1}{2^5} \geqslant$ الخطأ.

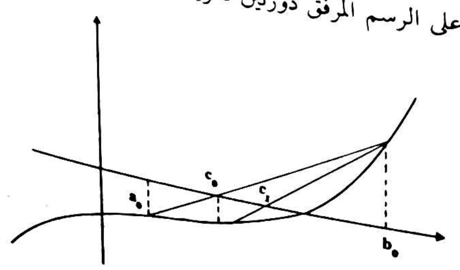
د - احسب دورة واحدة في طريقة الوضع الخاطىء لحساب جذر المعادلة في «ب» مستعملاً الفترة الابتدائية (.2 ,.1).

الإجابة: $c_0 = a_0 - f(a_0)\,\frac{(b_0 - a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = .1 - \frac{(3)(.1)}{-5}$

$$= .1 + .06 = 1.06$$

س 2:

أ - بيّن على الرسم المرفق دورتين لطريقة الوضع الخاطىء:



ب - استنتج العلاقة: $c_i = \dfrac{a_i b_i + 7}{a_i + b_i}$

من تطبيق طريقة القاطع في حل المعادلة $x^2 - 7 = 0$

$$c_i = a_i - f(a_i)\,\frac{b_i - a_i}{f(b_i) - f(a_i)} = a_i - \frac{(a_i^2 - 7)(b_i - a_i)}{b_i^2 - a_i^2}$$

$$= a_i - \frac{(a_i^2 - 7)}{b_2 + a_i} = \frac{a_i b_i - a_i^2 + a_i^2 + 7}{b_i + a_i}$$

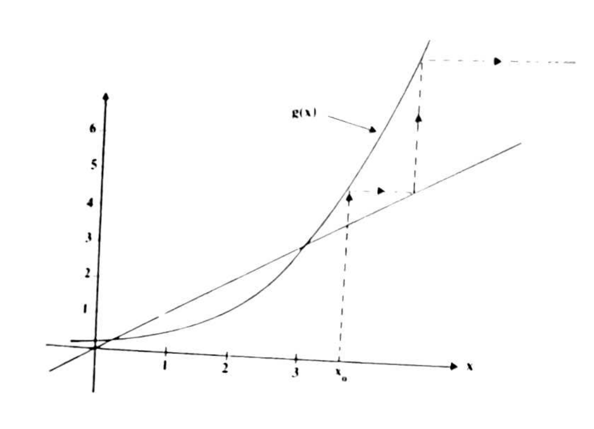
$$= (a_i b_i + 7)/(a_i + b_i)$$

حـ - استخدم العلاقة في «ب» في كتابة برنامج لحساب وطباعة c_i من $i = 1$ إلى $i = 10$ مبتدئاً بالقيم $a_1 = 2$ و $b_1 = 3$ (لاحظ أن $a_{i+1} = b_i$، $b_{i+1} = c_i$).

```
      A = 2
      B = 3
      DO 10 I = 1, 10
      C = (A * B + 7)/ (A + B)
      WRITE (*, *) C
      A = B
      B = C
10    CONTINUE
      STOP
      END
```

س 3:

أ - **بيّن على الرسم المرفق ما إذا كانت طريقة النقطة الثابتة $x_{i+1} = g(x_i)$ تؤدي أو لا تؤدي إلى تقارب نحو أحد جذري المعادلة $x = g(x)$ بالقيمة x_0 المبينة.**



يتضح من الرسم أن الطريقة لا تؤدي إلى التقارب المطلوب.

ب - استخدم طريقة نيوتن لحساب الجذر التربيعي $\sqrt{5}$ مبتدئاً بالقيمة $x_0 = 2$ وحساب دورة واحدة فقط.

$$x_1 = (x_0^2 + 5)/2x_0 = 9/4 = 2.25$$

حـ - أكتب البرنامج الفرعي FUNCTION SROOT (A) الذي يحسب الجذر التربيعي للعدد الموجب A. في حالة A سالبة فإنه يطبع إنذاراً بذلك ويتوقف. استعمل طريقة نيوتن مع أخذ $x_0 = A/2$ والتوقف عندما $|x_i^2 - A| < 10^{-6}$.

```
      FUNCTION SROOT (A)
      IF (A. LT. 0) WRITE (*, *) "A IS NEGATIVE"
      IF (A. LT. 0) RETURN
      SROOT = A/2
10    IF (ABS (SROOT ** 2 – A). LT. 1. OE – 6) RETURN
      SROOT = (SROOT ** 2 + A)/ (2 * SROOT)
      GO TO 10
      END
```


الزمن: **(1:30) (ساعة ونصف)**

س 1:

أ - أحسب دورة واحدة بطريقة جاوس - سيدل لحل المعادلات التالية:

$$3x + y + z - 1 = 0$$
$$x - 2y - 1 = 0$$
$$2y + 3z - 2 = 0$$

افترض القيم الابتدائية $x = y = z = 0$.

الحل:

$$x^{(1)} = (1 - y^{(0)} - z^{(0)})/3 = 1/3$$
$$y^{(1)} = (x^{(1)} - 1)/2 = -1/3$$
$$z^{(1)} = (2 - 2y^{(1)})/3 = (2 + 2/3)/3 = 8/9$$

ب - **هل يتحقق التقارب في «أ» عندما يزداد عدد الدورات؟ لماذا؟**

الحل:

نعم والسبب أن النظام سائد قطرياً، أي:

$$|a_{11}| = |3| > |1| + |1|$$
$$|a_{22}| = |-2| > |1|$$
$$|a_{33}| = |3| > |2|$$

س 2:

أ - حل المعادلات التالية بطريقة الحذف لجاوس:

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & .4 & .8 & -.8 \\ 0 & 1.8 & 2.6 & -2.6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & .4 & .8 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = -1,\ x_2 = (-.8 + .8)/.4 = 0$$

$$x_1 = (3 - 2(-1) - 1(0))/5 = 1$$

ب - اكتب برنامجاً فرعياً SUBROUTINE FDSUB (A, B, N, X) الذي يوجد المتجه X بحل النظام AX = B حيث A مصفوفة مثلثية سفلية (أي أن جميع عناصرها التي فوق القطر أصفار).

```
      SUBROUTINE FDSUB (A, B, N, X)
      DIMENSION A (N, N), B(N), X(N)
      X(1) = B(1)/ A(1, 1)
      DO 10 I = 2, N
      SUM = 0
      I1 = I - 1
20    DO 20 J = 1, I1
10    SUM = SUM + A (I, J) * X(J)
      X(I) = (B(I) - SUM)/ A(I, I)
      RETURN
      END
```


س 3:

أ - إذا كان عدد الطلبة في سنة 1984 هو 17,000 وفي سنة 1987 هو 19400 فقدّر عدد الطلبة في سنة 1988 باستعمال الاستكمال الخطي.

الحل:

$$p(1988) = 17000 + \frac{19400 - 17000}{1987 - 1984}(1988 - 1984)$$

$$= 17000 + \frac{2400}{3}(4) = 17000 + 3200 = 20200$$

ب - أوجد متعددة الحدود من الدرجة الثانية التي تلتقي مع الدالة $f(x) = \sin(x)$ عند $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \pi$.

x	y=sinx	Δy	$\Delta^2 y$
0	0	1	−2
$\pi/2$	1	−1	
π	0		

$$p(x) = 0 + \frac{1}{\pi/2}(x-0) - \frac{2}{2(\pi/2)^2}(x-0)(x-\pi/2)$$

$$= \frac{2}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

جـ - أكتب برنامجاً لتقدير عدد السكان في سنة من السنوات (يتم إدخالها) بمعلومية عدد السكان في السنوات الثلاث الماضية (أيضاً يتم إدخالها) وذلك باستعمال الاستكمال التربيعي.

```
      DIMENSION X(2), Y(2)
      DO 10 I = 1, 2
10    READ (*, *) X(I), Y(I)
      READ (*, *) XP
      YP = Y(1) + (Y(2) - Y(1)) * (XP - X(1)) + (Y(3) - 2 * Y(2)
     + Y (1)) * (XP - X(1)) * (XP - X(2))/2.
      WRITE (*, *) XP, YP
      STOP
      END
```

نموذج امتحان شامل مع الإجابة
(الجزء الأول)

(المجموع = 40 نقطة)

س 1:

أوجد قيمة تقريبية للجذر الموجب للمعادلة $2x^2 - 3 = 0$.

أ ـ بطريقة التنصيف مبتدئاً بالفترة [1, 2] وحساب دورتين فقط.

(نقطتان)

الحل:

$c_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \quad f(1.5) = 2(1.5)^2 - 3 = \frac{9}{2} - 3 = +1.5$

$f(a_1) = f(1) = 2 - 3 = -1, \; f(b_1) = f(2) = 8 - 3 = 5$

$c_2 = \frac{1.5+1}{2} = \frac{2.5}{2} = 1.25$

ب ـ بطريقة الوضع الخاطىء مبتدئاً بالفترة [1, 2] وحساب دورة واحدة.

(نقطتان)

الحل:

$c_1 = a_1 - f(a_1)\frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} = 1 - (-1)\frac{2 - 1}{5 - (-1)} = \frac{7}{6}$

$f(c_1) = 2(7/6)^2 - 3 = 49/18 - 3 = -5/18$

حـ ـ بطريقة نيوتن مع أخذ $x_0 = 2$ وحساب دورة واحدة.

(نقطتان)

الحل:

$x_0 = 2 \quad f(x_0) = 5 \quad f'(x_0) = 4x_0 = 8$

$x_1 = 2 - \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$

$f(x_1) = 2(11/8)^2 - 3 = 121/32 - 3 = 25/32$

د ـ أكتب برنامجاً لحساب 10 دورات بطريقة نيوتن مبتدئاً بالقيمة $x_0 = 2$ لحل المعادلة $2x^2 - 3 = 0$

(نقطتان)

```
      X = 2
      DO 20 I = 1, 10
20    X = X - (2 * X * X - 3)/ (4 * X)
      WRITE (*, *) X
      STOP
      END
```

س 2:

أ ـ احسب دورة واحدة لحل المعادلات التالية بطريقة جاوس ـ سيدل ابتداءً من $x = y = 0$

(نقطتان)

$3x + y = 1$

$x + 2y = 2$

$x_1 = \frac{1 - y_0}{3} = \frac{1}{3}$

$y_1 = \frac{2 - x_1}{2} = \frac{2 - 1/3}{2} = \frac{5}{6}$

ب ـ هل يتم التقارب نحو الحل في «أ» عندما يزداد عدد الدورات؟ لماذا؟

(نقطتان)

نعم. لان المعادلات سائدة قطرياً.

س 3:

اكتب البرنامج الفرعي :

SUBROUTINE ELEM1 (A, B, N)

الذي يقوم بالتعديلات اللازمة في المصفوفة المربعة A والمتجه B وذلك للتخلص من x_1 في جميع المعادلات (ما عدا المعادلة الأولى) في النظام الخطي AX = B المتكون من N معادلة . افترض أن $a_{11} \neq 0$.

(5 نقاط)

```
      SUBROUTINE ELEMI (A, B, N)
      DIMENSION A(N, N), B(N)
      DO 10 I = 2, N
      T = - A (I, 1)/ A(1, 1)
      DO 20 J = 2, N
20    A (I, J) = A(I, J) + T * A (1, J)
10    B(I) = B(I) + T * B(1)
      RETURN
      END
```

س 4:

أ - استكمل قيمة f(1.6) في الجدول التالي باستعمال جميع القيم المتوفرة:

x	1.5	1.7	1.8
f(x)	6.9	8.1	9.6

(5 نقاط)

$$\ell_0(1.6) = \frac{(1.6-1.7)(1.6-1.8)}{(1.5-1.7)(1.5-1.8)} = \frac{1}{3}$$

$$\ell_1(1.6) = \frac{(1.6-1.5)(1.6-1.8)}{(1.7-1.5)(1.7-1.8)} = \frac{(.1)(-.2)}{(.2)(-.1)} = 1$$

$$\ell_2(1.6) = \frac{(1.6-1.5)(1.6-1.7)}{(1.8-1.5)(1.6-1.7)} = \frac{(+.1)(-.1)}{(.3)(.1)} = -\frac{1}{3}$$

$$f(1.6) \simeq \frac{6.9}{3} + 8.1 - \frac{9.6}{3} = 2.3 + 8.1 - 3.2 = 10.4 - 3.2$$

$$= 7.2$$

س 5:

إذا كانت $|f'''(x)|$ لا تزيد عن 2 في الفترة [1.5, 1.8] فأوجد حداً أعلى للخطأ في (س 4) .

(4 نقاط)

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{|f'''(\xi)|}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\leq \frac{2}{6} |(1.6 - 1.5)(1.6 - 1.7)(1.6 - 1.8)|$$

$$\leq \frac{1}{3} (.1)(.1)(.2) = \frac{.002}{3} = .0067$$

س 6:

أ - أحسب قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^2 x^3\,dx$ بطريقة سمسن وذلك باستعمال n=2 (حيث n هي عدد تقسيمات فترة التكامل) .

(3 نقاط)

$$\int_1^2 x^3\,dx = \frac{0.5}{3} [1 + 4(1.5)^3 + 2^3] = 3.75$$

ب ـ ما هو الخطأ في التقريب المتحصل عليه في «أ»؟

(نقطتان)

$$\int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^2 = \frac{16-1}{4} = \frac{15}{4} = 3.75$$

إذن الخطأ = صفراً.

س 7:

إذا كان الخطأ في تقريب تكامل بطريقة سمسن مع تقسيم فترة التكامل إلى n فترة هو 0032. فقدِّر الخطأ إذا استعملنا 2n من الفترات.

(4 نقاط)

بما أن الخطأ يتناسب مع h^4 فإنه في هذه الحالة يتقلص بمقدار $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ أي $\frac{1}{16}$ وبالتالي فإن الخطأ الناتج باستعمال 2n من الفترات هو:

$$\frac{.0032}{16} = .0002$$

س 8:

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ فأوجد قيمة تقريبية للتفاضل $f'(1)$ باستعمال الفرق المركزي مع أخذ $h = \Delta x = 0.1$

(4 نقاط)

$$f'(1) = \frac{\frac{1}{1.1} - \frac{1}{.9}}{0.1} = \frac{1}{0.2}\left(\frac{.9-1.1}{.99}\right)$$

$$= \frac{-1}{.99} = -1.0101$$

الجزء الثاني

اختبار نموذجي (1) على الفصل السادس

الزمن: $1\frac{1}{2}$ (ساعة ونصف)

1 ـ تعتبر طريقة أويلر ذات استقرار مشروط، أما طريقة نقطة المنتصف فهي غير مستقرة على الإطلاق بينما تعتبر طريقة شبه المنحرف مستقرة بدون شرط.

(3 نقاط)

2 ـ استعمل طريقة أويلر المعدلة لتقدير y عند $x = .1$ من $y(0)=1$ والمعادلة $y'y = 1$. (استخدم 4 عشرية في الحساب).

$$p_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0) = 1 + \frac{(.1)}{1} = 1.1$$

$$y_1 = 1 + \frac{(.1)}{2}\left[1 + \frac{1}{1.1}\right] = 1 + (.05)(1 + .909)$$

$$= 1 + (.05)(1.909) = 1.09545$$

(5 نقاط)

3 ـ أكتب برنامجاً للمقارنة بين الحل الصحيح $y = e^{-x}$ للمعادلة $y' = -y$ و $y(0) = 1$ والحل بطريقة أويلر وذلك عند $x=1$ وقيم مختلفة لمقدار الخطوة h بحيث:

$$h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$$

(7 نقاط)

```
Y = 1
DO 100 I = 1, 100
H = 1.0/I
DO 20 K = 1, I
```

```
20    Y = Y - H * Y
      WRITE (*, *) Y, EXP (-1)
100   CONTINUE
      END
```

4 - (أ) استعمل طريقة رانج كوتا لحساب y_2، علماً بأن:

$y' = 4x^3 \qquad x_1 = 0, y_1 = 0, h = 0.2$

$k_1 = 0$

$k_2 = (.2)\,(4(0.1)^3) = .0008$

$k_3 = (.2)\,(4(0.1)^3) = .0008$

$k_4 = (.2)\,(4(.2)^3) = .0064$

$y_1 = \frac{1}{6}\,[4(.0008) + .0064]$

$= \frac{1}{6}\,[.0096] = .0016$

(6 نقاط)

4 - (ب) لماذا تعطي طريقة رانج كوتا قيم y_i مساوية للحل الصحيح عند حل المعادلة $y' = 4x^3$؟ (4 نقاط)

عند حل المعادلة $y' = f(x)$ بطريقة رانج كوتا، فإن هذه الطريقة تكافىء طريقة سمبسن للتكامل، والمعروف أن هذه الطريقة تعطي نتائج صحيحة عند تكامل متعددة الحدود من الدرجة الثالثة كما في السؤال.

5 - أوجد مرتبة الخطأ الموضعي في طريقة شبه المنحرف: (5 نقاط)



$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\,[y'_i + y'_{i+1}]$$

$$= y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}\,y''_i + \frac{h^3}{4}\,y'''_i + \ldots$$

بالمقارنة مع متسلسلة تايلور فإن الخطأ في هذه الصيغة هو $O(h^3)$.

نموذج اختبار «2» الجزء الثاني

الزمن: 1:30 (ساعة ونصف)

1 - **أوجد قيمة تقريبية** $y(0.5)$ من المسألة الحدية

$y'' + xy = 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 2$

باستعمال طريقة الفروق المنتهية $(h = 0.5)$

الإجابة:

$$\frac{1}{(.5)^2}[y(1) - 2y(.5) + y(0)] + (0.5)(y(.5)) = 1$$

$$4[2 - 2y(.5) + 0] + .5y(.5) = 1$$

$$7.5\,y(.5) = 7 \Rightarrow y(.5) = .932$$

(4 نقاط)

2 - أوجد قيمة تقريبية λ بحيث يكون للمسألة الحدية

$y'' + \lambda xy = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$

حل غير صفري، وذلك باستعمال طريقة الفروق المنتهية مع أخذ $h = 0.5$.

$$\frac{1}{(.5)^2}[y(1) - 2y(.5) + y(0)] + \lambda\,(.5)\,y(.5) = 0$$

$$4[-2y(.5)] + .5\lambda y(.5) = 0$$

$$[-8 + \lambda/2]\,y(.5) = 0$$

$$y(.5) \neq 0 \Rightarrow [-8 + \lambda/2] = 0 \Rightarrow \lambda = 16$$

(4 نقاط)

3 - لحل المسألة الحدية:

$y'' = f(x, y, y')$

$y(0) = 0,\ y(1) = 2$

بطريقة التصويب، أعطت المحاولة $y'(0) = 1$ النتيجة $y(1) = 3$. ثم أعطت المحاولة الثانية $y'(0) = 2$ النتيجة $y(1) = 5$. ما هي قيمة $y'(0)$ في المحاولة الثالثة بطريقة القاطع؟

الإجابة:

$$y'(0) = \gamma = 1 + (2 - 3)(1 - 2)/(3 - 5)$$

$$= 1 - 1/2 = 0.5$$

(4 نقاط)

4 - إذا كان U_0 هو المتجه الابتدائي، وكان $U_{i+1} = AU_i$ فإن متوسط نسب عناصر المتجه U_{i+1} إلى عناصر المتجه U_i تؤول إلى أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة A عندما تسعى i إلى ما لا نهاية.

أكتب برنامجاً فرعياً لهذه الطريقة مستعملاً حداً أقصى من الدورات MAX ورقم اختبار التقارب EPS.

```
      SUBROUTINE POWER (A, N, AVE, UIN, U, MAX, EPS)
      DIMENSION A (N, N), UIN (N), U(N)
      OLD = 0
      DO 100 IT = 1, MAX
      DO 10 I = 1, N
      SUM = 0
      DO 20 J = 1, N
20    SUM = SUM + A (I, J) * UIN (J)
10    U(I) = SUM
      SRAT = 0
      DO 30 I = 1, N
30    SRAT = SRAT + U(I)/ UIN (I)
      AVE = SRAT/ N
      IF (ABS (AVE- OLD). LT. EPS) RETURN
      OLD = AVE
      DO 40 I = 1, N
```

```
40      U1N(I) = U(I)
100     CONTINUE
        RETURN
        END
```

(8 نقاط)

5 ـ أوجد علاقة خطية بين الضغط P ودرجة الحرارة T من البيانات التالية:

T	270	280	290
P	100	105	113

استعمل تحويلاً مناسباً، وأوجد العلاقة على الصورة $P = a_0 + a_1 T$.

$x = T - \bar{T} = T - 280$

$y = p - 100$ $\qquad y = b_0 + b_1 x$

$$\begin{bmatrix} 3 & \Sigma x \\ \Sigma x & \Sigma x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 130 \end{bmatrix}$$

$b_0 = 18/3 = 6$

$b_1 = 130/200 = 13/20$

$$p - 100 = 6 + \frac{13}{20}(T - 280) = \frac{13}{20}T - 182 + 6$$

$$p = \frac{13}{20}T - 76$$

(6 نقاط)

6 ـ لتمثيل البيانات (x_i, y_i) على الصورة:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + a_2(x - \bar{x})^2$$

حيث $\bar{x}$ هو متوسط قيم x_i، أوجد a_1 بدلالة النقط (x_i, y_i).

$$\begin{bmatrix} m & 0 & \Sigma g_2 \\ 0 & \Sigma g_1^2 & 0 \\ \Sigma g_2 & 0 & \Sigma g_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y g_0 \\ \Sigma y g_1 \\ \Sigma y g_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\Sigma y(x - \bar{x})}{\Sigma(x - \bar{x})^2}$$

(4 نقاط)

نموذج امتحان شامل للجزء الثاني

(الزمن: ساعتان)

س (1) : أوجد القيم الذاتية للمصفوفة: $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

جـ (1) :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 40$$

$$= 10 - 7\lambda + \lambda^2 - 40$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda - 30$$

$$= (\lambda + 3)(\lambda - 10) = 0$$

القيم الذاتية هي 10 و -3

(5 درجات)

س (2) : استعمل طريقة القوى (دورتان فقط) لإيجاد قيمة تقريبية ذاتية للمصفوفة في س (1) مبتدئاً بالقيمة الابتدائية للمتجه الذاتي:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جـ (2) :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} \qquad \alpha_1 = 13$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 7/13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{13} + 5 \\ \frac{56}{13} + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\ \frac{1}{13} \\ 9\ \frac{4}{13} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = 9\ \frac{4}{13}$$

(6 درجات)

س (3) : أكتب برنامجاً لحساب y عند x = 2 من المسألة الابتدائية:

$$y'' + y = \sin(x), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

وذلك بطريقة أويلر مع h = 0.1

جـ (3) :

```
    H = 0.1
    Y = 0
    U = 1
    DO 100 I = 1, 20
    Y = Y + H * U
    U = U + H * (SIN (X) - Y)
    X = X + H
100 WRITE (*, *) X, Y
    STOP
    END
```

س (4) : حل مسألة القيمة الحدية

$$y'' + 3xy = 0$$

$$y(0) = 0,\ y(1) = 1$$

بطريقة الفروق المركزية مع أخذ $h = \frac{1}{3}$.

(6 درجات)

جـ (4) :

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{(1/3)^2} + 3\left(\frac{1}{3}\right) y_1 = 0$$

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{(1/3)^2} + 3\left(\frac{2}{3}\right) y_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -17 & 9 \\ 9 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -9 & -16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -17 & 9 \\ 9 & -16 \end{vmatrix}} = \frac{81}{191} \; , \; y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 0 \\ 9 & -9 \end{vmatrix}}{191} = \frac{153}{191}$$

(6 درجات)

س (5) : أوجد ميل خط المربعات الصغرى للنقط:

$$(-h, y_0), (0, y_1), (h, y_2)$$

جـ (5) :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + y_1 + y_2 \\ -hy_0 + hy_2 \end{bmatrix}$$

ميل خط المربعات الصغرى $= a_1 = \frac{y_2 - y_0}{2h}$ **(5 درجات)**

س (6) : أكتب جزءاً من برنامج لتكوين المصفوفة:

$$S = \begin{bmatrix} 10 & \Sigma x & \Sigma x^2 \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \end{bmatrix}$$

حيث Σ تعني الجمع لقيم x_i من 1 إلى 10 والتي تتم قراءتها في البرنامج :

جـ (6) :

```
      DIMENSION X(10), S(3,3)
      READ (*, *) (X(I), I = 1, 10)
      DO 20 I = 1, 3
      DO 30 J = 1, 3
      S(I, J) = 0
      IF (I. EQ. 1. AND. J. EQ. 1) S(I, J) = 10
      IF (I + J. GT. 2) THEN
      DO 40 K = 1, 10
40    S(I, J) = S(I, J) + X (K) ** (I + J - 2)
      ENDIF
30    CONTINUE
20    CONTINUE
```

(6 درجات)

س (7) : استعمل طريقة أويلر مع أخذ $\Delta x = \frac{1}{3}$ و $\Delta t = \frac{1}{200}$ لحساب u من المعادلة:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0, x) = 9x^2$$

$$u(t, 0) = 0$$

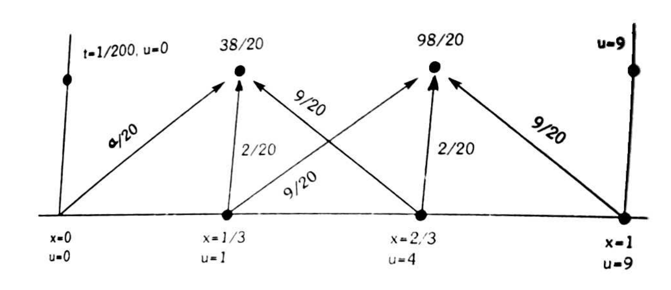
$$u(t, 1) = 9$$

أ) أحسب u عند $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $t = \frac{1}{200}$.

جـ (7 أ) :

$$r = \frac{k\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{10}{(200)\,(1/3)^2} = \frac{9}{20}$$

$$1 - 2r = 1 - \frac{18}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$



$$u\left(\frac{1}{200},\ \frac{1}{3}\right) = 1.9,\ u\left(\frac{1}{200},\ \frac{2}{3}\right) = 4.9$$

(5 درجات)

(ب) هل يتحقق الاستقرار عندما تؤول t إلى ∞ في الفقـرة (أ)؟ لماذا؟

نعم بما أن $\frac{9}{20} = r < \frac{1}{2}$ فإن شرط الاستقرار قد تحقق.

(درجة واحدة)

ملحق (2)

قائمة المصطلحات العلمية

Absolute error	الخطأ المطلق
Algorithm	نظام حسابي (خوارزمية)
Approximation	تقريب
Array	مصفوفة أحادية (أطروحة)
Augmented matrix	مصفوفة مزيدة
Back-substitution	التعويض إلى الخلف
Backward difference	الفرق المتأخر (الخلفي)
Best approximation	أفضل تقريب
Binomial expansion	نشر ذات الحدين
Bisection method	طريقة التنصيف
Boundary conditions	الشروط الحدية
Boundary-value problem	مسألة القيمة الحدية
Central difference	الفرق المركزي
Characteristic polynomial	متعددة حدود مميزة
Characteristic value	قيمة ذاتية
Characteristic vector	متجه ذاتي
Chopping	القطع
Composite rule	قاعدة مركبة
Condition number	رقم الحالة
Conditionally stable method	طريقة ذات استقرار مشروط
Consistent method	طريقة متوافقة
Continuous function	دالة مستمرة

Convergence	تقارب
Corrector formula	صيغة تصحيح
Derivative	مشتقة
Determinant of a matrix	محددة مصفوفة
Diagonally dominant matrix	مصفوفة سائدة قطرياً
Diagonal matrix	مصفوفة قطرية
Difference equation	معادلة فروق
Differential equation	معادلة تفاضلية
Diffusion equation	معادلة الانتشار
Discrete data	بيانات متفرقة
Divided difference	الفرق المقسوم
Eigen value	قيمة ذاتية
Eigen vector	متجه ذاتي
Elimination	حذف
Elliptic equation	معادلة ناقصة
Error	خطأ
Euclidean norm	المعيار الاقليدي
Euler's method	طريقة أويلر
Exact solution	الحل الصحيح (المضبوط)
Explicit method	طريقة صريحة
Exponent	الأس
Extended Euler's method	طريقة أويلر الموسعة
Extrapolation	استكمال خارجي
Factorial	مضروب
Finite-difference operator	مؤثر الفروق المنتهية
Fixed-point method	طريقة النقطة الثابتة
Formula	صيغة
Forward difference	فرق متقدم
Gauss-Jordan method	طريقة جاوس وجوردان
Gaussian elimination method	طريقة الحذف لجاوس
Global error	الخطأ الكلي
Hyperbolic equation	معادلة زائدة

Identity matrix	مصفوفة الوحدة
Ill-conditioned matrix	مصفوفة سيئة (معتلة)
Implicit method	طريقة ضمنية
Increment	زيادة
Infinity norm	معيار ما لا نهاية
Initial condition	شرط ابتدائي
Initial-value problem	مسألة القيمة الابتدائية
Integration	تكامل
Interpolation	استكمال
Inverse of a matrix	معكوس مصفوفة
Inverse Power method	طريقة قوى المعكوس
Iteration	دورة (تحسينة)
Least-squares method	طريقة المربعات الصغرى
Linear interpolation	الاستكمال الخطي
Linear system	نظام خطي
Local truncation error	خطأ الصيغة الموضعي
Lower-triangular matrix	مصفوفة مثلثية سفلية
Matrix	مصفوفة
Maximum norm	معيار الحد الأعلى
Mean-value theorem	مبرهنة القيمة الوسطى
Method of False position	طريقة الوضع الخاطىء
Midpoint method	طريقة نقطة المنتصف
Milne's method	طريقة ملن
Modified Euler's method	طريقة أويلر المعدلة
Multi-step method	طريقة الخطوات المتعددة
Newton's method	طريقة نيوتن
Newton's backward difference formula	طريقة نيوتن للفروق المتأخرة
Newton's divided difference formula	طريقة نيوتن للفروق المقسومة
Newton's forward difference formula	طريقة نيوتن للفروق المتقدمة
Norm	معيار
Normal equations	المعادلات القياسية
Numerical method	طريقة عددية

Operator	مؤثر
Order	رتبة (مرتبة)
Orthogonal functions	دوال متعامدة
Orthogonal vectors	متجهات متعامدة
Parabola	قطع مكافىء
Parabolic equation	معادلة مكافئة
Partial differential equation	معادلة تفاضلية جزئية
Pivot element	عنصر الارتكاز
Pivoting	عملية الارتكاز
Polynomial	متعددة حدود (حدودية)
Power method	طريقة القوى
Predictor formula	صيغة تنبؤ
Predictor-corrector method	صيغة تنبؤ وتصحيح
Radian	زاوية نصف قطرية
Rate of convergence	معدل التقارب
Region of stability	منطقة الاستقرار
Regula-Falsi method	طريقة الوضع الخاطىء
Relative error	خطأ نسبي
Richardson's extrapolation method	طريقة ريتشاردسن بالاستكمال الخارجي
Root of an equation	جذر معادلة
Round-off error	خطأ التقريب
Row	صف
Runge-kutta method	طريقة رانج - كوتا
Secant method	طريقة القاطع
Series	متسلسلة
Shooting method	طريقة التصويب
Simpson's method	طريقة سمسن
Single-step method	طريقة الخطوة الواحدة
Spectral radius of a matrix	نصف القطر الطيفي لمصفوفة
Stability	استقرار
Step	خطوة
Subscript	دليل سفلي

Superscript	دليل فوقي (علوي)
System of equations	نظام معادلات
Symmetric matrix	مصفوفة متماثلة
Taylor's series	متسلسلة تايلور
Test equation	معادلة اختبار
Tolerance condition	شرط تسامح
Tolerance number	رقم تسامح
Trapezoidal method	طريقة شبه المنحرف
Tridiagonal matrix	مصفوفة ذات أقطار ثلاثة
Triangular matrix	مصفوفة مثلثية
Trivial solution	حل تافه
Truncation error	خطأ الصيغة
Unconditionally stable method	طريقة مستقرة بدون شرط
Unstable method	طريقة غير مستقرة
Upper-triangular matrix	مصفوفة مثلثية علوية
Vandermonde matrix	مصفوفة فاندرموند
Vector	متجه
Vector norm	معيار المتجه
Wave equation	معادلة الموجة
Weakly stable method	طريقة ضعيفة الاستقرار
Zero of a function	جذر دالة

المراجع

أ ـ باللغة العربية

[illegible] مسائل التحليل العددي»، لمؤلفه فرانسيس شيد [illegible] ماكجروهيل للنشر (1981).

ب ـ باللغة الانجليزية

1 - Curtis F. Gerald & Patrick O. Wheatly, «Applied Numerical Analysis», Addison-Wesley Publishing Co. (1984).

2 - Richard L. Burden, J. Douglas Faires & Albert C. Reynolds, «Numerical Analysis», Prindtle, Weber & Schmidt Publishing company, Boston, Massachusettes (1981).

3 - Kendall E. Atkinson, «An Introduction to Numerical Analysis», John Wiley & Sons, New York (1978).

4 - B. P. Demidovi & I. A. Maron, «Computational Mathematics», Translated from Russian by George Yankovsky, Mir Publishers, Moscow (1973).